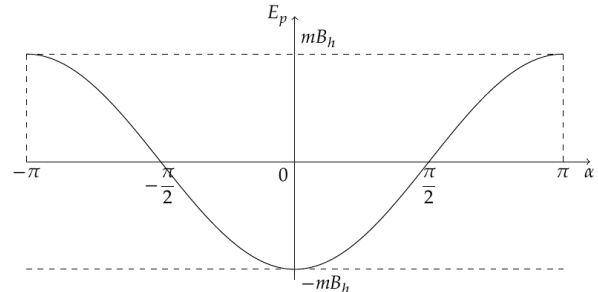
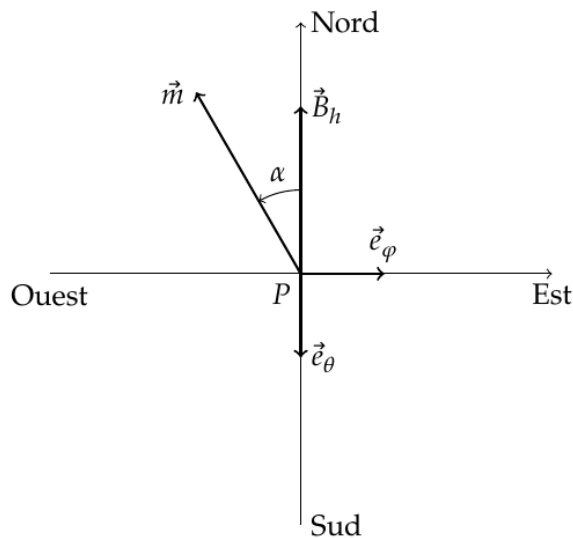


1. Dans un champ magnétique extérieur $\vec{B} = B\vec{u}$, un moment $\vec{m}$ possède l'énergie potentielle $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$. Une aiguille aimantée horizontale va donc être sensible à la composante horizontale du champ magnétique (dirigée selon la direction Nord/Sud).

plan horizontal



En notant B_h cette composante, l'énergie potentielle devient $E_p = -mB_h \cos(\alpha)$.

La position d'équilibre stable (minimum d'énergie potentielle) correspond alors à $\alpha = 0$.

l'aiguille indique donc le Nord et cette position est stable.

2. Par définition, l'énergie cinétique de l'aiguille vaut $E_c = \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2$ et son énergie mécanique totale vaut $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 - mB_h \cos(\alpha)$.

La conservation de l'énergie mécanique donne alors $\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow I\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + mB_h \sin(\alpha)\dot{\alpha} = 0$

$$\ddot{\alpha} + \frac{mB_h}{I} \sin(\alpha) = 0$$

Pour des petits mouvements, on linéarise le sin : $\ddot{\alpha} + \frac{mB_h}{I}\alpha = 0$ de la forme $\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \sin(\alpha) = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{mB_h}{I}}$.

La période vaut donc $\tau_{osc} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{I}{mB_h}}$.

Connaître la période d'oscillation permet de connaître le champ magnétique horizontal $B_h = \frac{I}{4\pi^2 \tau_{osc}^2 m}$.

3. En reprenant la formule de l'énoncé, on trouve

$$\vec{B}(P) = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M_0 \cos(\theta)}{R_T^3} \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_0 \sin(\theta)}{R_T^3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \theta = \pi/2 - \lambda \Rightarrow \vec{B}(P) = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M_0 \sin(\lambda)}{R_T^3} \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_0 \cos(\lambda)}{R_T^3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. En un point de l'équateur, on a $\lambda = 0 \Rightarrow \vec{B}(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_0}{R^3} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_0}{R^3} \vec{u}_z$.

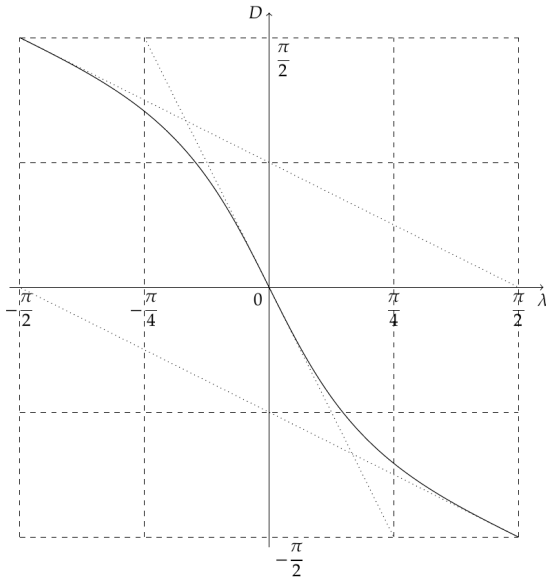
On en déduit donc que $M_0 < 0 : \vec{M} = -M_0 \vec{u}_z$. Puis $M_0 = -\frac{4\pi R_T^3 B_E}{\mu_0} = -7.9 \cdot 10^{22} \text{ A.m}^{-2}$.

Aux pôles Nord et Sud, donc pour $\lambda = \pm\pi/2$, le champ est radial $\Rightarrow \vec{e}_r = \pm\vec{u}_z$

Aux 2 pôles, le champ magnétique est vertical selon $\vec{u}_z$ et vaut $B_N = B_S = 2B_E$.

5. Dans l'hémisphère Nord, on a $\lambda > 0$ et $M_0 < 0$; le champ radial est donc négatif : le champ est dirigé vers le bas et la déclinaison D est négative.

$$\tan(D) = -\frac{B_r}{B_\theta} \Rightarrow \boxed{\tan(D) = -2 \tan(\lambda)}$$



Aux pôles, la composante horizontale magnétique est nulle $\Rightarrow$ théoriquement, la boussole ne devrait pas y être sensible. Dans cette situation, chaque petite perturbation influe sur son mouvement et le champ auquel elle est sensible n'est plus celui du moment magnétique de la Terre : "la boussole s'affole".

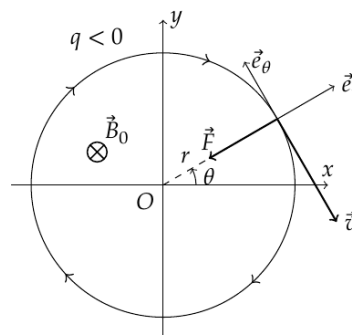
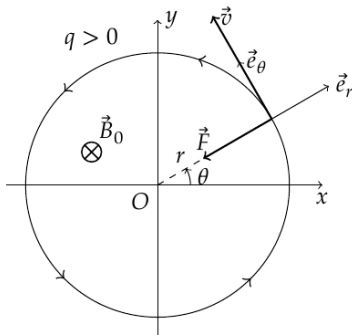
Il semble donc difficile de savoir dans quel hémisphère on se trouve ; théoriquement, on pourrait placer l'aiguille dans la direction Est-Ouest et regarder si l'aiguille a tendance à plonger (hémisphère Nord) ou à se relever (hémisphère Sud) mais du fait des frottements, cela semble peu réaliste. De plus, la boussole sera sans doute plus sensible aux champs magnétiques créés par la haute atmosphère (vent solaire) qu'au champ magnétique terrestre...

6. On se place en coordonnées polaires et on considère une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$.

La particule subit la force magnétique de Lorentz $\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$. $\vec{F}_m \cdot \vec{v} = 0$: cette force est de puissance nulle ; l'énergie cinétique de la particule se conserve : Le mouvement est uniforme.

Le mouvement est circulaire ; le principe fondamental de la dynamique en projection sur $\vec{u}_r$ donne alors, en notant v_0 la vitesse $-m \frac{v_0^2}{R} = -m R \omega_c^2 = -|q| v_0 B$.

On trouve alors $\omega_c = \frac{|q| B_0}{m}$. Le sens de parcours dépend du signe de q



7. La boucle de courant est alors parcourue par une intensité $i = \frac{\delta q}{\delta t} = \frac{q}{T}$ où $T = \frac{2\pi}{\omega_c}$ est la période du mouvement. le moment magnétique associé est $\vec{M} = \pi R^2 i \vec{u}_z = \frac{q \omega_c R^2}{2} \vec{u}_z$. Donc $\vec{M} \cdot \vec{B}_0 = -\frac{q \omega_c R^2 B_0}{2} = -\frac{m v_0^2}{2} = -Ec$.

La situation au voisinage du pôle nord est représenté ci-contre.

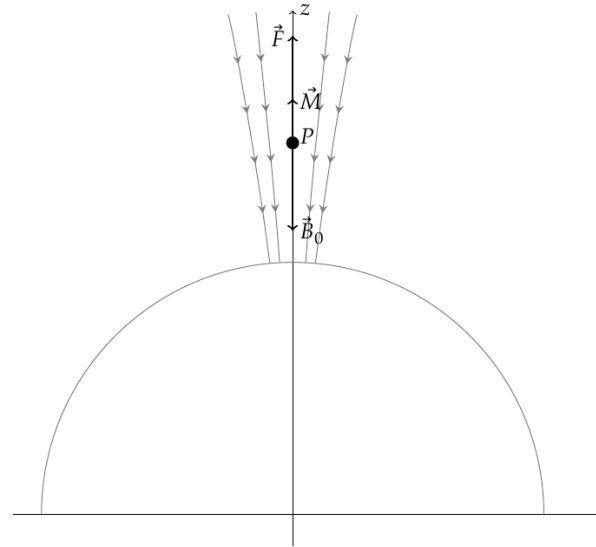
Le champ magnétique terrestre est $\vec{B}_0 = -B_0(z)\vec{e}_z$ avec $B_0 > 0$.

Sur l'axe Oz , la norme du champ magnétique décroît avec l'altitude, donc $\frac{dB_0}{dz} < 0$

Le mouvement du proton a été décrit à la question 6 : $\vec{M} = M_z\vec{e}_z$ avec $M_z > 0$.

8. La force subit par le proton est $\vec{F} = -M_z \frac{dB_0}{dz} \vec{e}_z$ avec $F_z = -M_z \frac{dB_0}{dz} > 0$. Donc $\vec{F} = F_z \vec{e}_z$ avec $F_z > 0$.

$$\begin{cases} \vec{B}_0 = -B_0(z)\vec{e}_z & \text{avec } B_0 > 0 \\ \vec{M} = M_z\vec{e}_z & \text{avec } M_z > 0 \\ \vec{F} = F_z\vec{e}_z & \text{avec } F_z > 0 \end{cases}$$



La force étant verticale ascendante, le proton qui s'approche du pôle Nord est donc freiné dans son mouvement vertical.

9. L'équation de Maxwell-Thomson impose $\text{div}(\vec{B}) = 0$. Si on considère un champ purement vertical, on doit donc avoir $\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$, ce qui n'est pas le cas ici. On doit donc considérer également une composante radiale B_r du champ magnétique et alors $\text{div}(\vec{B}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_r}{\partial r} = 0$; on peut alors bien avoir $G_m(z) \neq 0$...

10. D'après les questions précédentes, on a :
- $$\begin{cases} Ec = M(z)B_0(z) & \text{Energie cinétique} \\ F_z = -M(z)\frac{dB_0}{dz} & \text{Force de dérive} \\ B_0(z) = \frac{\mu_0 M_0}{2\pi z^3} & \text{Champ dipolaire} \end{cases}$$

On peut alors en déduire l'expression de $G_m(z) = \frac{-3B_0}{z}$ et de la force de dérive $F_z = -\frac{Ec}{B_0} \frac{dB_0}{dz} = \frac{3Ec}{z}$. Au voisinage immédiat de la Terre, on en déduit $F_z = \frac{2Ec}{R_T} \simeq 4 \cdot 10^{-23} \text{ N}$ et $Pds = mg \simeq 2 \cdot 10^{-26} \text{ N}$.

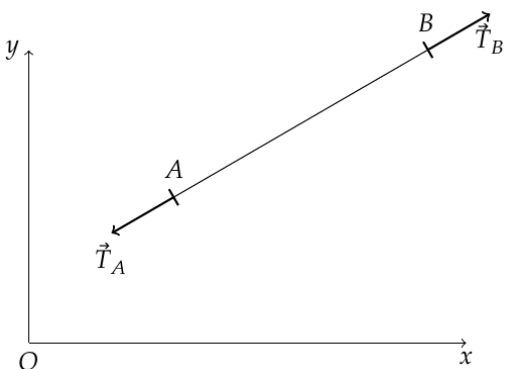
Le poids est négligeable devant la force de dérive!

On considère un tronçon de corde de longueur dl . O est un point fixe du référentiel d'étude. Ce système étant de masse négligeable, sa quantité de mouvement et son moment cinétique par rapport à O sont nuls, soit : $\vec{T}_A + \vec{T}_B = \vec{0}$ $\vec{OA} \wedge \vec{T}_A + \vec{OB} \wedge \vec{T}_B = \vec{0}$ on en déduit :

11. déduit :

$$\vec{T}_A = -\vec{T}_B \quad \vec{AB} \wedge \vec{T}_A = \vec{0}$$

La tension est la même partout le long de la corde et elle est colinéaire à la corde.



12. On considère le traineau de masse M dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Il subit comme forces extérieures :

$$\begin{cases} \text{Le poids } \vec{P}ds = M\vec{g} \\ \text{La force de traction } \vec{F} = F\vec{u}_x \\ \text{La réaction normale } \vec{R}_n = R_n\vec{u}_y \\ \text{La réaction tangentielle } \vec{R}_t = -R_t\vec{u}_x \end{cases}$$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit

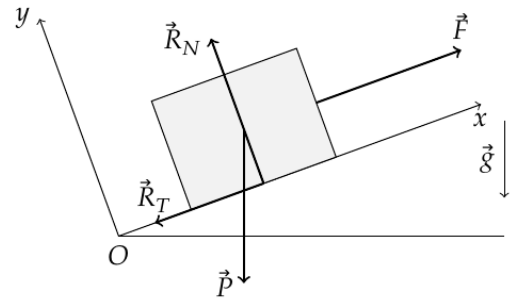
$$M\vec{a} = \vec{P}ds + \vec{F} + \vec{R}_n + \vec{R}_t = M\ddot{x}\vec{u}_x$$

Par projection sur les axes (Ox) et (Oy), on en déduit :

$$\begin{cases} M\ddot{x} = -Mg\sin(\alpha) - R_t + F & (1) \\ 0 = -Mg\cos(\alpha) + R_n & (2) \end{cases}$$

Or, la loi de Coulomb donne $R_t = -\mu_d R_n$.

En remplaçant dans (1), on trouve $M\ddot{x} = -Mg(\sin(\alpha) + \mu_d \cos(\alpha)) + F = Mg\mu'_d + F$ avec $\mu'_d = \mu_d \cos(\alpha) + \sin(\alpha)$



13. On considère désormais la situation $\alpha = 0$ et $F = F_0 - \beta v$.

Avec une vitesse nulle, les équations deviennent $R_t = F = F_0$ et $R_n = Mg$ avec $R_t \leq \mu_s R_n$.

Le traineau démarre donc pour une force minimale telle que $R_t = \mu_s R_n$ soit $F_0 = \mu_s Mg = 3.9 \cdot 10^2 \text{ N}$.

14. L'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ est : $M \frac{dv}{dt} + \beta v = F_0 - \mu_d Mg$ du type $\tau \frac{dv}{dt} + v = v_{lim} = v_0$

avec $\tau = \frac{M}{\beta}$ et $v_0 = \frac{F_0 - \mu_d Mg}{\beta}$. $v(t_1) = 0.95 v_0$ à la date $t_1 = -\tau \ln(0.05)$. En prenant $\ln(0.05) \simeq 3$, on trouve alors : $t_1 = 3\tau \Rightarrow \beta = \frac{3M}{t_1} = 3 \cdot 10^2 \text{ kg/s}$ et $F_0 = \beta v_0 + Mg \simeq 10^3 \text{ N}$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

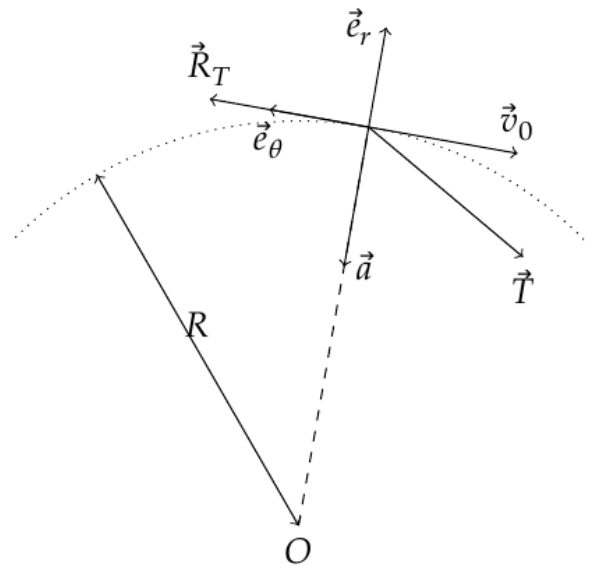
$$M\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \vec{a} = -\frac{v_0^2}{R} & \text{mouvement circulaire uniforme} \\ \vec{P} = -Mg\vec{e}_z & \text{poids} \\ \vec{R}_N = R_N\vec{e}_z \\ \vec{R}_T = R_T\vec{e}_\theta \\ R_T = \mu_d R_N & \text{loi de COULOMB} \end{cases}$$

15.

$$\text{Donc, en projection sur la base polaire : } \begin{cases} T \cos \theta = \mu_d Mg \\ T \sin \theta = M \frac{v_0^2}{R} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} T = M \sqrt{\mu_d^2 g^2 + \frac{v_0^4}{R^2}} \\ \tan \theta = \frac{v_0^2}{\mu_d R g} \end{cases}$$



16. Le 1er principe de la thermodynamique appliqué à la tranche de section S comprise entre z et $z + dz$, entre les instants t et $t + dt$ s'écrit :

$$\begin{cases} d^2 H = \rho_g c_g S dz [T(z, t + dt) - T(z, t)] = \rho_g c_g S dz dt \frac{\partial T}{\partial t} \\ dH = \delta Q_e = S [j_Q(z, t) - j_Q(z + dz, t)] dt = -S dt dz \frac{\partial j_Q}{\partial z} = \lambda_g S dt dz \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{cases}$$

En simplifiant, on obtient donc l'équation de la chaleur à 1D :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_g}{\rho_g c_g} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

17. En ordre de grandeur, on a alors : $\frac{T}{\Delta t} = \frac{\lambda_g}{\rho_g c_g} \frac{T}{(\Delta z)^2}$ et donc $\Delta t = \frac{\rho_g c_g}{\lambda_g} (\Delta z)^2$

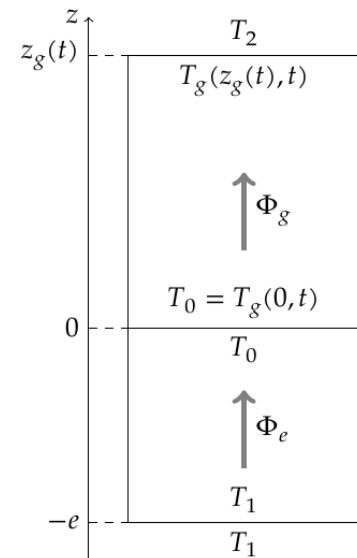
Pour que le régime stationnaire soit atteint, on doit donc attendre un temps $t \gg \frac{\rho_g c_g}{\lambda_g} (\Delta z)^2$. L'évolution sera donc "assez lente" si la croissance de la glace se fait à une vitesse petite devant la vitesse de diffusion thermique : $v_{glace} = \frac{dz_g}{dt} \ll \frac{\lambda_g}{\rho_g c_g z_g}$.

18. En régime quasi stationnaire, on peut utiliser la notion de résistance thermique ; $R_g = \frac{\Delta T}{\Phi} = \frac{T_0 - T_g}{S j_Q}$; or le profil de température est linéaire en

z : $T_g(z) = T_0 + \frac{T_g - T_0}{z_g} z \Rightarrow j_Q = \lambda \frac{T_0 - T_g}{z_g}$ et donc $R_g = \frac{z_g}{S \lambda_g}$.

De même, on trouve pour l'eau liquide : $R_e = \frac{e}{S \lambda_e}$

19. En utilisant la loi de newton, on trouve simplement que $R_i = \frac{1}{Sh}$



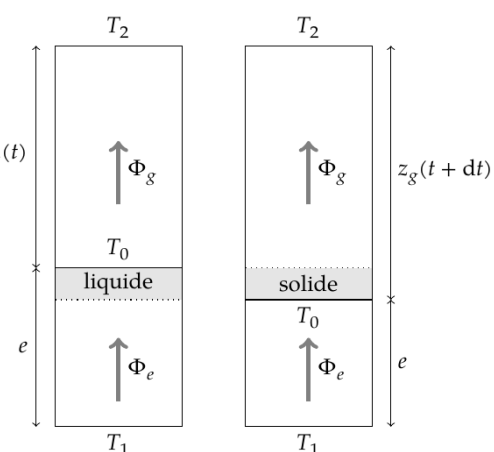
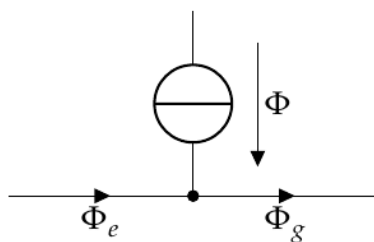
20. On considère la couche d'eau d'épaisseur dz_g qui change d'état entre t et $t + dt$.
Le 1er principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\begin{cases} d^2 H = -\rho_g l_f S \frac{dz_g}{dt} dt & \text{Changement d'état} \\ dH = \delta Q_e = [\Phi_e - \Phi_g] dt & \text{Echanges thermiques avec l'extérieur} \end{cases}$$

On en déduit donc : $-\rho_g l_f S \frac{dz_g}{dt} = -\Phi = \Phi_e - \Phi_g$ $\Phi + \Phi_e = \Phi_g$.

Cette équation peut être interprétée comme une loi des noeuds avec un $z_g(t)$

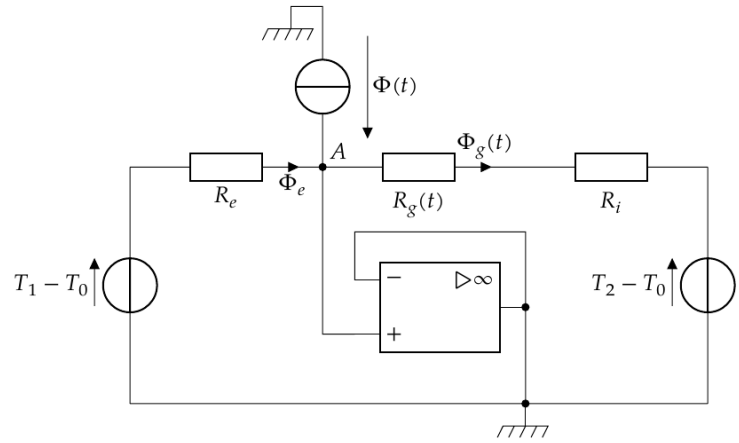
générateur de courant de valeur $\Phi = \rho_g l_f S \frac{dz_g}{dt}$



21. Un montage suiveur permet d'assurer un potentiel nul en un point du circuit.

Le montage est représenté ci contre.

Le changement d'état se fait à température constante $T_0 = 273 K$; la température de la glace en contact avec l'eau liquide est donc constante : la différence de température aux bornes de D est donc nulle à chaque instant.



22. La loi des noeuds en terme de potentiel s'écrit alors :

$$\Phi(t) + \frac{T_1 - T_0}{R_e} + \frac{T_2 - T_0}{R_g + R_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_g l_f S \frac{dz_g}{dt} + \frac{T_1 - T_0}{R_e} = \frac{T_0 - T_2}{\frac{z_g(t)}{\lambda_g} + \frac{1}{h}}.$$

Or on suppose $R_e \gg R_g + R_i$ donc : $\rho_g l_f S \frac{dz_g}{dt} = \frac{S(T_0 - T_2)}{\frac{z_g(t)}{\lambda_g} + \frac{1}{h}}$

$$\left[z_g(t) \frac{dz_g}{dt} + \frac{dz_g}{dt} \frac{\lambda}{h} \right] = \frac{\lambda_g S}{\rho_g l_f} [T_0 - T_2]$$

Cette relation s'intègre en : $\left[\frac{z_g^2}{2} + \frac{\lambda}{h} z_g(t) \right] = \frac{\lambda_g S}{\rho_g l_f} [T_0 - T_2] t$. On la réécrit selon l'énoncé et on identifie les expressions :

$$[z_g^2 + l_g z_g(t)] = \frac{l_g^2}{\tau_g} t$$

$$\begin{aligned} l_g &= \frac{2\lambda_g}{h} \\ \tau_g &= \frac{2\rho_g l_f \lambda_g}{(T_0 - T_2)h^2} \end{aligned}$$

23. L'équation précédente admet pour solution positive :

$$z_g(t) = \frac{l_g}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{t}{\tau_g}} \right].$$

L'allure de la courbe est alors ci-contre.

Pour $t \ll \tau_g$: $z_g(t) \simeq l_g \frac{t}{\tau_g}$: l'épaisseur de glace croît linéairement avec le temps.

Pour $t \gg \tau_g$: $z_g(t) \simeq l_g \sqrt{t \tau_g}$. La croissance de la glace se ralentit.

