

Physique 1 - Mines Ponts PSI - Proposition de corrigé

N'hésitez pas à me signaler par mail (Jean.Maysonnave@ac-creteil.fr) toute coquille ou erreur !

I. Analyse de Fourier et échantillonnage d'un signal électronique

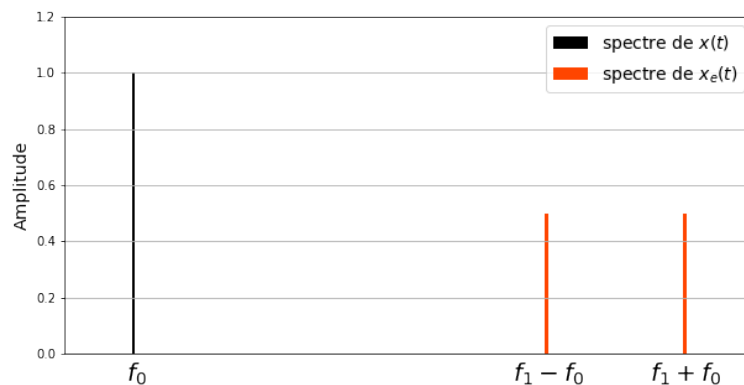
1. Le spectre associé à la fonction $x(t)$ est un pic à la fréquence f_0 . De plus, on a :

$$x_e(t) = x(t) \times p(t) = \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_1 t)$$

Ici, comme l'on sait très bien tracer le spectre d'une fonction sinusoïdale, il faut ramener ce produit à une combinaison linéaire de sinus/cosinus. Ça se fait facilement via la relation de trigonométrie $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$ d'où :

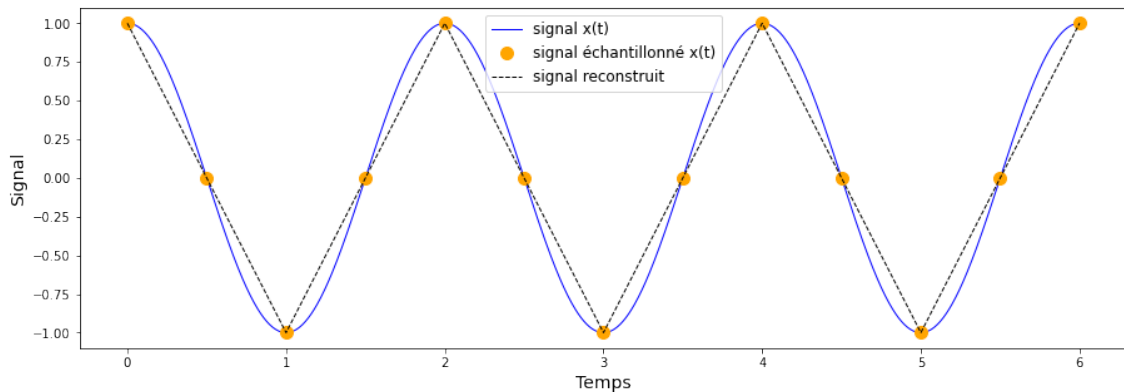
$$x_e(t) = \frac{1}{2} \cos\{2\pi(f_0 + f_1)t\} + \frac{1}{2} \cos\{2\pi(f_1 - f_0)t\}$$

On obtient ainsi :

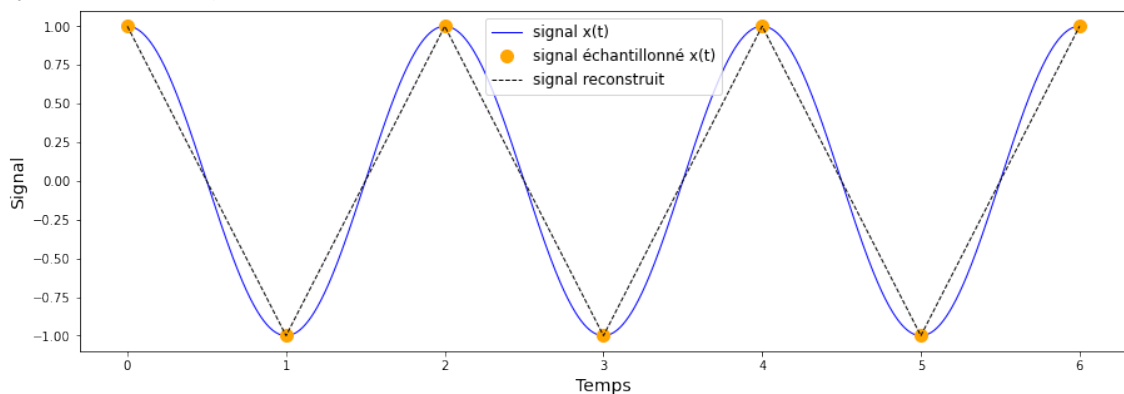


2 On comprend donc que le signal échantillonné est tel que : $x_e(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t) & \text{si } t = kT_e \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ Ensuite, représentons le signal échantillonné $x_e(t)$ et le signal $x(t)$ dans els trois situations évoquées.

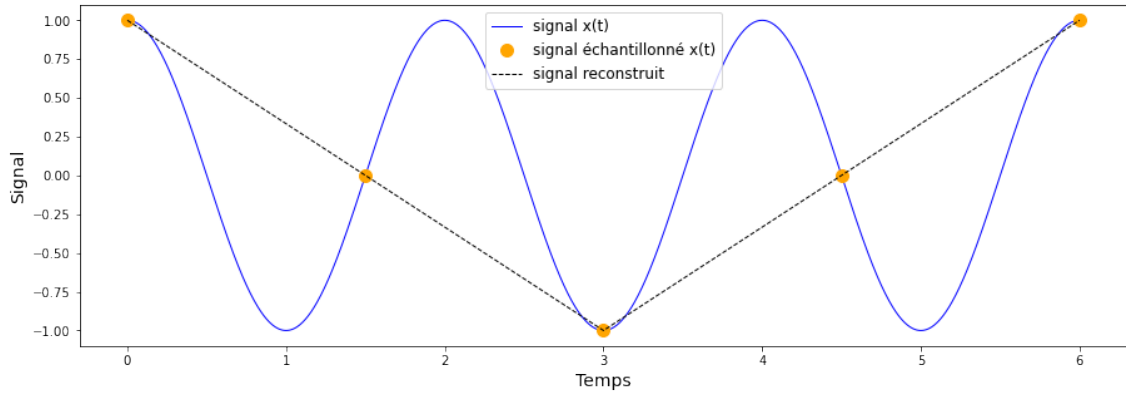
— si $f_e = 4f_0$, ça veut dire qu'il y a un échantillon tous les quarts de période du signal $x(t)$.



— si $f_e = 2f_0$, ça veut dire qu'il y a un échantillon toutes les demi-périodes du signal $x(t)$.



— si $f_e = \frac{4}{3}f_0$, ça veut dire qu'il y a un échantillon tous les trois-quarts de période du signal $x(t)$.



Dans le troisième cas, on voit qualitativement que le signal reconstruit visuellement à partir des échantillons (en trait tireté) n'a pas la même périodicité que le signal qui a été échantillonné. Il n'est donc pas représentatif du signal analogique de départ.

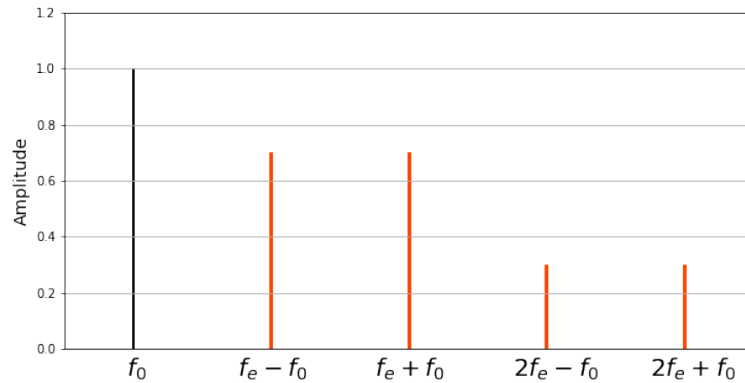
3. Cette fois en utilisant la même relation trigonométrique qu'à la Q1, on obtient :

$$x_e(t) = a_0 \cos(2\pi f_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_k}{2} \cos(2\pi(kf_e - f_0)t) + \frac{a_k}{2} \cos(2\pi(kf_e + f_0)t) \right\}$$

Pour $f_e = 4f_0$, on aura donc dans le spectre :

- un pic à la fréquence f_0 , d'amplitude a_0 ;
- un pic à la fréquence $f_e - f_0 = 3f_0$, d'amplitude $a_1/2$;
- un pic à la fréquence $f_e + f_0 = 5f_0$, d'amplitude $a_1/2$;
- un pic à la fréquence $2f_e - f_0 = 7f_0$, d'amplitude $a_2/2$;
- un pic à la fréquence $2f_e + f_0 = 9f_0$, d'amplitude $a_2/2$;

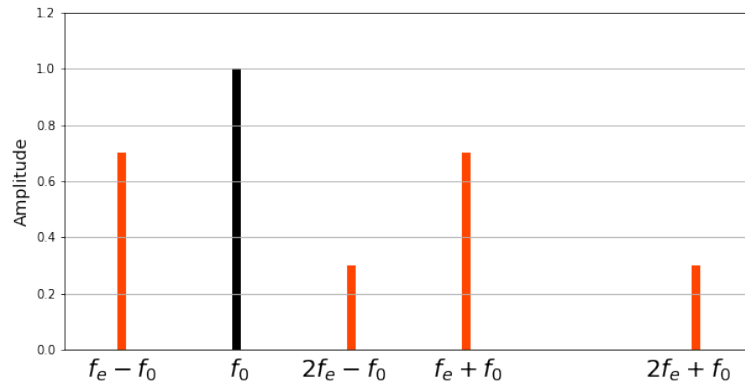
soit (amplitudes respectives arbitraires pour a_0 , a_1 et a_2) :



Pour $f_e = \frac{4}{3}f_0$, on aura donc dans le spectre :

- un pic à la fréquence f_0 , d'amplitude a_0 ;
- un pic à la fréquence $f_e - f_0 = \frac{1}{3}f_0$, d'amplitude $a_1/2$;
- un pic à la fréquence $f_e + f_0 = \frac{7}{3}f_0$, d'amplitude $a_1/2$;
- un pic à la fréquence $2f_e - f_0 = \frac{5}{3}f_0$, d'amplitude $a_2/2$;
- un pic à la fréquence $2f_e + f_0 = \frac{11}{3}f_0$, d'amplitude $a_2/2$;

soit (amplitudes respectives arbitraires pour a_0 , a_1 et a_2) :



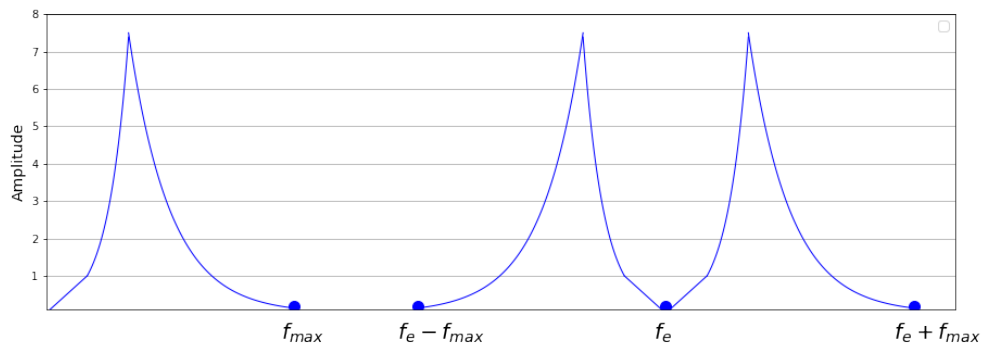
Dans ce second cas, les spectres se chevauchent. En conservant seulement l'intervalle de 0 à f_e , on ne conserve que deux pics dont le premier est issu du spectre replié, ces deux pics se situent de part et d'autre de la fréquence $\frac{(f_e - f_0) + f_0}{2} = \frac{f_e}{2}$.

4. A la Q2, on voit que le signal est "perdu" quand f_e devient trop petite. Et en particulier à la Q3, on note que cela s'observe lorsque $|f_e - f_0| < f_0$. Dans ce cas le pic de plus basse fréquence n'est plus celui que l'on souhaite, in fine, récupérer. La condition à respecter est donc $f_e - f_0 > f_0$, soit :

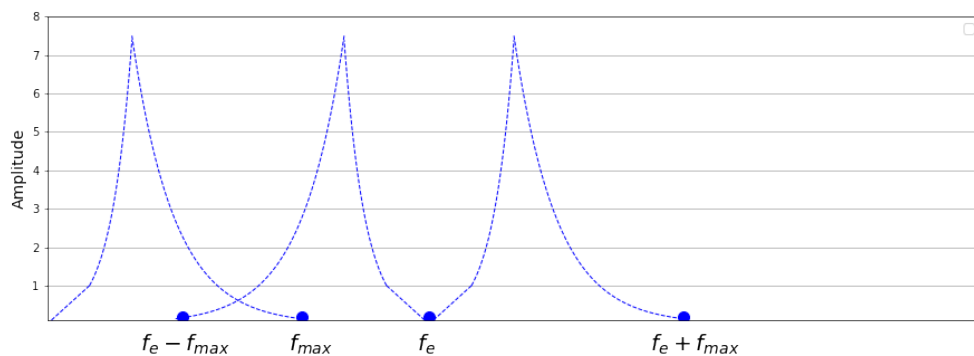
$$f_e > 2f_0$$

5. Si la fréquence f_{max} est bien échantillonnée, alors $f_e > 2f_{max}$ et donc de fait toutes les fréquences f du signal le seront également car $f < f_{max}$.

Si le critère de Shannon est respecté, on a une allure du type :



En revanche, si ça n'est pas le cas, on a chevauchement, comme ci-dessous :



(les amplitudes dans la partie associée au chevauchement vont se superposer, ce n'est pas représenté sur le schéma qualitatif ci-dessus).

Pour un signal sonore audible $f_{max} = 20$ kHz et on peut prendre $f_e = 60$ kHz par exemple, pour respecter le critère de Shannon, sans non plus relever un nombre d'échantillons excessif ce qui peut poser des problèmes, par exemple de mémoire.

6. Il faut un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_{max} < f_c < f_e - f_{max}$ pour récupérer le spectre du signal de départ. On pourrait par exemple choisir $f_c = 30$ kHz dans le cas de l'exemple précédent. Un filtre passe bas d'ordre 2 semble dans ce cas plus pertinent qu'un d'ordre 1 parce que $f_e - f_{max} = 40$ kHz est très proche de f_c . Sinon, avec un filtre d'ordre 1, il vaut mieux avoir travaillé au préalable avec une fréquence d'échantillonnage bien plus élevée (que celle de 60 kHz proposée à la réponse précédente).

7. Chaque voie stocke donc $N = \frac{\Delta t}{T_e}$ échantillons sur 16 bits. La taille minimale du fichier est donc :

$$\frac{2 \times N \times 16}{8 \times 10^6} = \frac{2 \times 7.5 \times 6 \times 4.41 \times 10^6 \times 4 \times 4}{8 \times 10^6} \sim 7,9.10^2 Mo$$

II. Analyse de Fourier et acoustique

8. L'approximation acoustique consiste à s'intéresser à des ondes acoustiques qui perturbent peu le milieu dans lequel elles se propagent. Cela revient à supposer que :
$$\begin{cases} |\mu_1| \ll \mu_0 \\ |p_1| \ll p_0 \\ |v_1| \ll c \end{cases}$$

Pour un son audible, on peut avoir par exemple : $|\mu_1| = 10^{-4} \text{ kg.m}^{-3}$; $|p_1| = 10 \text{ Pa}$; $|v_1| = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$. Les ondes audibles sont situées entre 20 Hz et 20 kHz.

9. La définition du coefficient de compressibilité isentropique est :

$$\chi_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S$$

Pour linéariser ce coefficient dans l'approximation acoustique, faisons déjà apparaître la masse volumique :

$$\chi_s = -\mu \left(\frac{\partial(1/\mu)}{\partial P} \right)_S = -\mu \times \left(-\frac{1}{\mu^2} \right) \times \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$$

Cette expression, à entropie constante, peut se réécrire sous forme différentielle $d\mu = \mu \chi_s dP$. Or d'une part $d\mu = d\mu_1$ et d'autre part $\mu \chi_s dP = (\mu_0 + \mu_1) \chi_s dp_1 \sim \mu_0 \chi_s dp_1$ en effectuant la linéarisation. Donc $d\mu_1 = \mu_0 \chi_s dp_1$, soit en intégrant :

$$\mu_1 = \mu_0 \chi_s p_1$$

(pas de constante d'intégration car si μ_1 est nulle p_1 l'est aussi).

C'est pertinent d'introduire ce coefficient ici, car on peut raisonnablement supposer que l'écoulement est parfait. Dans ce cas, l'entropie est conservée. Ce coefficient mesure la variation relative de volume sous l'effet d'une variation de pression.

10. Le bilan des forces associé à une particule de fluide (de masse dm et volume $d\tau$) donne $dm \vec{a} = -\vec{\text{grad}} P d\tau$, soit :

$$\vec{a} = -\frac{1}{\mu} \vec{\text{grad}} P$$

Dans le cadre de l'approximation acoustique, on a $\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} \sim \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$. En effet, si $|v_1| \ll c$, ça veut dire que le déplacement d'une particule de fluide va être très petit devant λ . Et donc que l'accélération convective, due à la seule contribution de la variation spatiale du champ des vitesses (typiquement sur une échelle λ) est très faible. On la néglige donc. La projection suivant $\vec{u}_x$ du PFD donne donc :

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

Par ailleurs, la loi de conservation de la masse donne $\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$. Ici $\vec{j} = \mu \vec{v}_1 = \mu v_1(x, t) \vec{e}_x$ d'où $\text{div} \vec{j} = \frac{\partial(\mu v_1)}{\partial x}$. Soit :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu v_1)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

En linéarisant les deux équations précédentes, on obtient successivement :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} \quad (3)$$

et

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

Les deux équations (3) et (4) font intervenir trois inconnues, réduisons les à deux en remplaçant $\mu_1 = \mu_0 \chi_s p_1$. Ainsi on a :

$$\mu_0 \chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

et

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} \quad (6)$$

Puis effectuons l'opération $\frac{\partial(6)}{\partial t} - \frac{\partial(5)}{\partial x}$, on obtient :

$$\mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} - \mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = 0 + \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$$

Les second et troisième termes du membre de gauche (théorème de Schwarz). On obtient ainsi l'équation :

$$\mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = 0$$

C'est l'équation de d'Alembert avec $c_s = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}$

11. Utilisons l'équation (6) qui lie p_1 et v_1 . En passant en complexes, on obtient :

$\mu_0 j \omega \underline{v}_1 = -(-jk) \underline{p}_1$ soit $\mu_0 \omega \frac{\underline{p}_{1m}}{Z_a} = k \underline{p}_{1m}$ et donc $Z_a = \mu_0 \frac{\omega}{k}$ et par ailleurs l'équation de d'Alembert donne $\frac{\omega}{k} = c_s$. Au final, on obtient :

$$Z_a = \mu_0 c_s$$

avec Z_a l'impédance acoustique.

12. Au niveau de la cloison :

$$\underline{v}_1(X, t) + \underline{v}_r(X, t) = \underline{v}_t(X, t)$$

Or le déplacement typique d de la cloison dû à l'onde acoustique est de faible amplitude devant λ . En effet nous sommes dans l'approximation acoustique $|v_1| \sim \frac{d}{T} \ll c = \frac{\lambda}{T}$. Donc :

$\underline{v}_1(X, t) \sim \underline{v}_1(0, t)$; $\underline{v}_r(X, t) \sim \underline{v}_r(0, t)$; $\underline{v}_t(X, t) \sim \underline{v}_t(0, t)$, on en déduit $\underline{v}_1(0, t) + \underline{v}_r(0, t) = \underline{v}_t(0, t)$, soit pour tout t :

$$\underline{v}_{1m} + \underline{v}_{rm} = \underline{v}_{tm}$$

13. Au niveau de la cloison toujours :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = (p_1 + p_r) S \vec{e}_x - p_t S \vec{e}_x - K X \vec{e}_x$$

si on se replace en $x = 0$ et pour tout t , on obtient :

$$j\omega m \underline{v}_{tm} = (\underline{p}_{1m} + \underline{p}_{rm} - \underline{p}_{tm}) S - K \underline{X}_m$$

$$\text{or } \underline{p}_{rm} = -Z_a \underline{v}_{rm} = -Z_a (\underline{v}_{tm} - \underline{v}_{1m}) = -Z_a \left(\frac{\underline{p}_{tm}}{Z_a} - \frac{\underline{p}_{1m}}{Z_a} \right) = \underline{p}_{1m} - \underline{p}_{tm}$$

$$\text{et } \underline{v}_{tm} = \frac{\underline{p}_{tm}}{Z_a}$$

On remplace ces deux dernières expressions dans l'équation associée au PFD, ce qui donne :

$$j \frac{m\omega}{Z_a} \underline{p}_{tm} = 2(\underline{p}_{1m} - \underline{p}_{tm}) S - K \underline{X}_m$$

Après développements, on obtient :

$$\frac{\underline{p}_{tm}}{\underline{p}_{1m}} = \frac{1}{1 + j \frac{m\omega}{2SZ_a} + \frac{K}{2j\omega SZ_a}}$$

On a bien la forme de l'expression attendue. Si on procède par identification, on obtient successivement :

$$H_0 = 1$$

$$\text{et : } \begin{cases} \frac{Q}{\omega_0} = \frac{m}{2SZ_a} \\ \frac{\omega_0}{Q} = \frac{K}{2SZ_a} \end{cases}$$

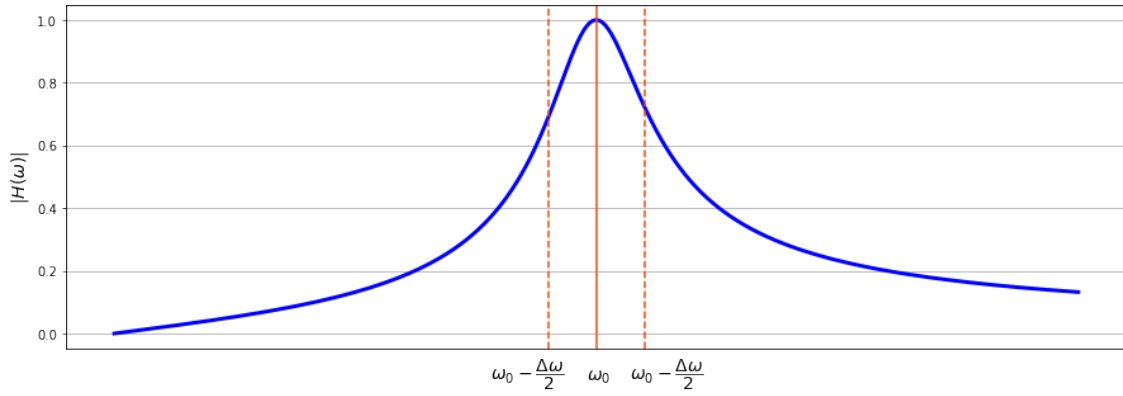
A partir de ces deux équations on obtient :

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \text{ et } Q = \frac{m}{2SZ_a} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Pour le tracé, il faut exprimer le module qui est :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

Le tracé donne :



en ayant bien en tête que $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$. Les fréquences de coupures représentées à $\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$ et $\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$ correspondent à $\frac{H_0}{\sqrt{2}}$. La cloison agit comme un filtre passe-bande sur les ondes sonores. Elles ne sont transmises que dans un intervalle de pulsations proche de ω_0 . Pour $\omega = \omega_0$, il y a résonance, les sondes sonores sont transmises avec un maximum d'amplitude.

14. Si on néglige l'élasticité, cela revient dans la fonction de transfert à faire l'hypothèse que $\frac{K}{2\omega SZ_a} \ll \frac{m\omega}{2SZ_a}$, ce qui se résume à :

$$\omega^2 \gg \frac{K}{m}$$

C'est donc dans ce régime de pulsation que cette hypothèse est validée. Dans ce cas la fonction de transfert s'écrit cette fois :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{m\omega}{2SZ_a}}$$

La cloison se comporte cette fois ci comme un filtre passe-bas de pulsation de coupure $\omega_c = \frac{2SZ_a}{m}$.

On souhaite : $I_{dB,t} - I_{dB,i} = -40$ dB. Dans la mesure où $I_{dB,t} = 10\log\left(\frac{\langle \Pi_t \rangle}{\langle \Pi_{ref} \rangle}\right)$ et $I_{dB,i} = 10\log\left(\frac{\langle \Pi_i \rangle}{\langle \Pi_{ref} \rangle}\right)$, on a :

$$10\log\left(\frac{\langle \Pi_t \rangle}{\langle \Pi_i \rangle}\right) = -40$$

et comme :

$$\frac{\langle \Pi_t \rangle}{\langle \Pi_i \rangle} = \left(\frac{p_{tm}}{p_{1m}}\right)^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{m\omega}{2SZ_a}\right)^2}$$

donc $\left(\frac{m\omega}{2SZ_a}\right)^2 = 10^4 - 1 \sim 10^4$ soit au final avec $m = Se\mu_e$ et $Z_a = \mu_0 c_s$ on aboutit à :

$$e = \frac{200\mu_0 c_s}{2\pi\mu_e f} = \frac{2 \cdot 10^2 \times 1 \times 3,4 \cdot 10^2}{2 \times 3,1 \times 1,2 \cdot 10^3 \times 2 \cdot 10^2} \sim 4 \text{ cm}$$

III. Analyse de Fourier et diffusion thermique

15. Raisonnons par analyse dimensionnelle comme cela est suggéré. On cherche une expression du type :

$$D = \mu^\alpha \lambda^\beta c^\gamma$$

avec :

$$- [D] = L^2 \cdot T^{-1};$$

$$- [\mu] = M \cdot L^{-3}$$

$$- [\lambda] = \frac{[\vec{j}]}{[\text{grad}T]} = \left[\frac{J \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}{K \cdot m^{-1}} \right] = \left[\frac{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}{K \cdot m^{-1}} \right] = M \cdot T^{-3} \cdot L \cdot K^{-1};$$

$$- [c] = \left[\frac{J}{mT} \right] = \left[\frac{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}{kg \cdot K} \right] = L^2 \cdot T^{-2} \cdot K^{-1}$$

d'où :

$$L^2.T^{-1} = M^\alpha.L^{-3\alpha}.M^\beta.T^{-3\beta}.L^\beta.K^{-\beta}.L^{2\gamma}.T^{-2\gamma}.K^{-\gamma}$$

On en déduit le système des quatre équations :

$$\begin{cases} 2 = -3\alpha + \beta + 2\gamma \\ 0 = \alpha + \beta \\ -1 = -3\beta - 2\gamma \\ 0 = -\beta - \gamma \end{cases}$$

D'où l'on tire finalement :

$$\alpha = -1; \beta = 1; \gamma = -1 \text{ soit } D = \frac{\lambda}{\mu c}$$

Ainsi comme D est homogène au carré d'une distance sur un temps, on peut exprimer τ comme :

$$\tau = \frac{L^2}{D} = \frac{L^2 \mu c}{\lambda} = \frac{4.10^2 \times 7,9.10^3 \times 5^2.10^{-2}}{8.10} \sim 10^4 \text{ s}$$

16. La loi de Fourier est :

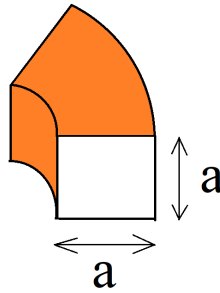
$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}$$

Ici $T = T(\theta, t)$ d'où $\overrightarrow{\text{grad}T} = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$ et donc :

$$\vec{j}_{th} = -\frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

Les lignes de champ correspondent à des cercles concentriques.

17. Voici le volume élémentaire qui est évoqué :



Le volume élémentaire associé est donc :

$$dV \sim R d\theta \int_{R-a/2}^{R+a/2} dr \int_{-a/2}^{a/2} dz \text{ soit } dV = R a^2 d\theta$$

La surface latérale correspond aux deux zones orangées visibles auxquelles il faut en ajouter deux autres non visible dans la partie arrière du volume élémentaire soit :

$$dS_{\text{lat}} \sim 2R d\theta a + 2R d\theta a = 4R d\theta a$$

Un bilan d'énergie sur le volume dV donne :

$$d^2U = \delta^2Q$$

avec

$$d^2U = dU(t+dt) - dU(t) = dmcT(\theta, t+dt) - dmcT(\theta, t) = \mu c \frac{\partial T}{\partial t} dt dV.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \delta^2Q &= \delta^2Q_{\text{diff}} + \delta^2Q_{\text{conv}} \\ &= (j(R, \theta) a^2 dt - j(R, \theta + d\theta) a^2 dt) - h(T - T_e) dS_{\text{lat}} dt \\ &= -\frac{\partial j}{\partial \theta} a^2 d\theta dt - h(T - T_e) dS_{\text{lat}} dt \\ &= \frac{\lambda a^2}{R} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} d\theta dt - h(T - T_e) 4R a d\theta dt \end{aligned}$$

(il faut veiller au signe devant le terme conducto-convectif, c'est une erreur assez courante). On réinjecte les deux membres développés dans le bilan d'énergie et en simplifiant par $d\theta$ et dt , on obtient :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{4h}{a} (T - T_e)$$

18. Dans le cas stationnaire, on a bien sûr : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, soit en reprenant l'équation précédente et en introduisant δ :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 T = -\left(\frac{R}{\delta}\right)^2 T_e$$

La solution de cette équation est :

$$T(\theta) = A \exp\left(-\frac{R\theta}{\delta}\right) + B \exp\left(\frac{R\theta}{\delta}\right) + T_e$$

Et puis $[\delta] = L$ car $\frac{R\theta}{\delta}$ doit être adimensionné.

19. Il y a un pic de température en $\theta = 0$. A proximité de $\theta = \pi$, la température varie peu, le flux s'annule. Au final, les conditions aux limites donnent donc : $\begin{cases} T(0^+) = T_1 \\ j(\pi) = 0 \end{cases}$

(l'équation différentielle n'est pas valable en $\theta = 0$ car c'est le point où l'on chauffe). Ces deux équations donnent :

$$\begin{cases} A + B = T_1 - T_e \\ A \exp\left(-\frac{R\pi}{\delta}\right) = B \exp\left(\frac{R\pi}{\delta}\right) \end{cases}$$

d'où l'on déduit :

$$B = \frac{T_1 - T_e}{1 + \exp\left(\frac{2R\pi}{\delta}\right)} \text{ et } A = \frac{\exp\left(\frac{2R\pi}{\delta}\right)}{1 + \exp\left(\frac{2R\pi}{\delta}\right)} (T_1 - T_e)$$

et donc la solution complète est :

$$T(\theta) = T_e + \frac{T_1 - T_e}{1 + \exp\left(\frac{2R\pi}{\delta}\right)} \left\{ \exp\left(\frac{R\theta}{\delta}\right) + \exp\left(\frac{R(2\pi - \theta)}{\delta}\right) \right\}$$

20. On s'attend à ce que la diffusion soit complètement établie lorsque $\tau = \frac{L^2}{D} = \frac{\mu c L^2}{\lambda}$, avec $L = \pi R$. Au final :

$$\tau = \frac{7,9 \cdot 10^3 \times 4 \cdot 10^2 \times \pi \times 1,6^2 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot 10} \sim 3 \cdot 10^3 \text{ s}$$

Au final, on obtient :

$$\tau \sim 1 \text{ h}$$

On retrouve bien le même ordre de grandeur.

21. Il n'y a pas de terme de conducto-convection, donc cette fois :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$$

en utilisant le fait que $T(\theta, t) = f_n(\theta)g_n(t)$ on obtient :

$$\frac{\mu c R^2}{\lambda} \frac{f_n}{f_n''} = \frac{g_n}{g_n'}$$

Ces deux termes sont égaux mais dépendent a priori de variables différentes : la seule possibilité est qu'ils s'égalisent chacun avec la même constante que l'on va noter α . En conséquence, on a :

- d'une part $g_n = \alpha g_n'$ soit $g_n = a_n \exp(t/\alpha)$;
- d'autre part $f_n'' - \frac{\mu c R^2}{\lambda \alpha} f_n = 0$. Comme α est forcément négative (sinon g_n diverge), c'est une équation du type oscillateur

harmonique dont la solution est donc $f_n(\theta) = A \cos\left(\sqrt{\frac{\mu c R^2}{-\lambda \alpha}} \theta + \varphi\right)$

En posant $A = B_n$, $\alpha = -\tau_n$ et en prenant $\varphi = 0$ par un choix judicieux de l'origine des angles θ , on aboutit à :

$$T_n(\theta, t) = B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right) \text{ avec } \frac{1}{d_n} = \frac{\mu c}{\lambda \tau_n}$$

22. T_m représente la température moyenne le long du profil de $\theta = -\pi$ à $\theta = \pi$. La solution de la question précédente a pour périodicité $\Theta = 2\pi \frac{d_n}{R}$ et est une solution de l'équation étudiée. Or on peut noter que dans la géométrie associée au problème, il faut une fonction qui se répète à minima tous les 2π . Toute fonction de période $\frac{2\pi}{n}$ avec n entier naturel non nul correspond donc. On en déduit donc que :

$$\Theta = 2\pi \frac{d_n}{R} = \frac{2\pi}{n} \text{ soit } n = \frac{R}{d_n}$$

Une combinaison linéaire de solutions à variables séparées permet de prendre en compte d'un coup toutes les valeurs possibles de n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\theta) \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right)$$

C'est bien également une solution de l'équation différentielle (celle-ci étant linéaire). Enfin, il est à noter que la solution $T(\theta, t) = C$ avec C constante est aussi solution. La solution générale est donc :

$$T(\theta, t) = C + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\theta) \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right)$$

ce qui correspond bien aux conditions initiales si $C = T_m$. Par identification, on en déduit que :

$$d_n = \frac{R}{n}; B_n = b_n \text{ et } \tau_n = \frac{\mu c d_n^2}{\lambda} = \frac{\mu c R^2}{\lambda n^2}$$

23. L'observation de M. Fourier se traduit mathématiquement par le fait que tous les termes $n \geq 2$ deviennent rapidement négligeables devant celui associé à $n = 1$. C'est logique parce que tous les termes s'atténuent avec un temps caractéristique :

$$\tau_n = \frac{\mu c R^2}{\lambda n^2}$$

qui est toujours plus petit quand n augmente. Donc le terme en $n = 2$ s'amortit quatre fois plus vite que celui en $n = 1$, le terme en $n = 3$ s'amortit neuf fois plus vite que celui en $n = 1$. Cette dépendance penche dans le sens où le terme en $\cos(\theta)$, associé à $n = 1$, devienne rapidement dominant dans la somme devant ceux associés à $n > 1$.

***** FIN DU CORRIGE *****