Spé PSI*
Année 2026-2027

Corrigé DS n°2.

Problème 1 (CCINP PC 2010).

I. 1°. $J^2 = 3J$ et par récurrence immédiate $J^k = 3^{k-1} J$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

2°. $A = I_3 + J$ avec $I_3 J = J I_3$.

Formule du binôme de Newton : $A^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} J^k I_3^{m-k}$, $m \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow A^m = \left(\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} 3^{k-1}\right) J + I_3$$

$$= I_3 + \frac{J}{3}\left(\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} 3^k\right) = I_3 + \frac{J}{3}\left(\left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 3^k 1^{m-k}\right) - 1\right)$$

D'où $A^m = I_3 + \dfrac{(3+1)^m - 1}{3} J = I_3 + \dfrac{(4^m - 1)}{3} J$

On en déduit $f^m = Id + \frac{1}{3}(4^m - 1) j$.

Vrai aussi pour $m = 0$.

3°. • Existence : $\forall m \in \mathbb{N}$, $f^m = (Id - \frac{j}{3}) + 4^m \left(\frac{j}{3}\right) = p + 4^m q$

avec $p = Id - \frac{j}{3}$ et $q = \frac{j}{3}$.

• Unicité : supposons que : $\forall m \in \mathbb{N}$, $f^m = p + 4^m q$.

Alors $\left.\begin{array}{l} f^0 = Id = p + q \\ f = p + 4q \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3q = f - Id \\ p = f - q \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} q = \frac{j}{3} \\ p = Id - \frac{j}{3} \end{array}\right.$

• On a clairement (I_3, J) libre dans $M_3(\mathbb{R})$ car J non colinéaire à I_3.

Donc (Id, j) est libre et par conséquent (p, q) libre.

4°. $q = \frac{j}{3} \Rightarrow q^2 = \frac{j^2}{9} = \frac{j}{3} = q$.

$p^2 = (Id - \frac{j}{3})^2 = Id + \frac{j^2}{9} - \frac{2}{3} j = Id - \frac{j}{3} = p$.

$p \circ q = (Id - \frac{j}{3}) \circ (\frac{j}{3}) = \frac{j}{3} - \frac{j^2}{9} = 0$

$q \circ p = 0$ également.

On en déduit que p et q sont deux projecteurs associés, càd

$\mathrm{Im} p = \mathrm{Ker} q$ et $\mathrm{Ker} p = \mathrm{Im} q$.

$q = \frac{j}{3} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(j) = \mathrm{Im}(J) \\ \mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(J) \end{cases}$

Or on a clairement $\mathrm{rg}(J) = 1$, $\mathrm{Im}(J) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$

$\dim \mathrm{Ker} J = 2$ et $e_1 - e_2 \in \mathrm{Ker} J$, $e_1 - e_3 \in \mathrm{Ker} J$.

Donc $\mathrm{Ker} J = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2, e_1 - e_3)$ avec $(e_1 - e_2, e_1 - e_3)$ libre.

Donc $\mathrm{Im} p = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2, e_1 - e_3)$, $\mathrm{Ker} p = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$

5°. Soit $h \in \mathrm{Vect}(p, q)$, $h = \alpha p + \beta q$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$h^2 = f \iff (\alpha p + \beta q) \circ (\alpha p + \beta q) = p + 4q$

$\iff \alpha^2 p + \beta^2 q = p + 4q$ $(p \circ q = q \circ p = 0)$

$\iff \begin{cases} \alpha^2 = 1 \\ \beta^2 = 4 \end{cases}$ car (p, q) libre.

$\iff \begin{cases} \alpha = \pm 1 \\ \beta = \pm 2 \end{cases}$

6°. p projecteur $\Rightarrow E = \mathrm{Im} p \oplus \mathrm{Ker} p$.

Soit (e'_1, e'_2) une base de $\mathrm{Im} p$, par ex $\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 \\ e'_2 = e_1 - e_3 \end{cases}$

et e'_3 base de $\mathrm{Ker} p$, $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Alors $r^2 = p \iff (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(r))^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Par exemple $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient car $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De plus $r \notin \text{Vect}(p,q)$ car les trois matrices :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{\text{Mat}(p)}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{\text{Mat}(q)}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{\text{Mat}(r)}$$

forment une famille libre.

$\longrightarrow$ On cherche h tq $h^2 = f$ et $h \notin \text{Vect}(p,q)$.

$f = p + 4q$ et $r^2 = p$ avec $q \circ r = r \circ q = 0$.

Par exemple $h = r + 2q$ convient.

$r \notin \text{Vect}(p,q) \Rightarrow h \notin \text{Vect}(p,q)$.

II. Hyp : $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$

1° a) Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$.

$$P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k = \sum_{k=0}^{d} a_k \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=0}^{d} a_k \lambda_i^k p_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=0}^{d} a_k \lambda_i^k \right) p_i$$

Ca'd $P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i$

b) Soit $R(X) = (X - \lambda_1) \circ \cdots \circ (X - \lambda_m)$

$R(f) = \sum_{i=1}^{m} R(\lambda_i) p_i = 0$.

2° $(L_1, \ldots, L_m)$ est la famille des polynômes de Lagrange associés à $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ 2 à 2 distincts.

Par def. $L_k(\lambda_i) = \delta_{ki}$

Donc pour $k \in [\![1, m]\!]$, $L_k(f) = \sum_{i=1}^{m} L_k(\lambda_i) p_i = 1 \cdot p_k$.

D'après 1° b) $R(f) = (f - \lambda_k \text{Id}) \circ \prod_{i \neq k} (f - \lambda_i \text{Id}) = 0$

Donc $(f - \lambda_k \text{Id}) \circ L_k(f) = 0$

Càd $(f-\lambda_k \mathrm{Id})\circ p_k = 0$.

On a bien $\mathrm{Im}(p_k) \subset \ker(f-\lambda_k \mathrm{Id})$.

3°. Soit $(i,j) \in [\![1,m]\!]^2$ avec $i \neq j$.

$p_i \circ p_j = L_i(f)\circ L_j(f) = (L_i \cdot L_j)(f)$

$\mathrm{Im} p_j \subset \ker(f-\lambda_j \mathrm{Id})$.

Or $L_i(f) = \prod_{k\neq i} \left(\frac{f-\lambda_k \mathrm{Id}}{\lambda_i - \lambda_k}\right) = Q(f)\circ(f-\lambda_j \mathrm{Id})$ car $j \neq i$

Donc $(f-\lambda_j \mathrm{Id})\circ p_j = 0 \Rightarrow Q(f)\circ(f-\lambda_j \mathrm{Id})\circ p_j = 0$

et $L_i(f)\circ p_j = 0$, càd $p_i \circ p_j = 0$

- On a $f^0 = \mathrm{Id} = p_1 + \cdots + p_m$.

Donc $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $p_i = \sum_{j=1}^{m} (p_i \circ p_j) = 0 + p_i \circ p_i$

D'où le résultat $p_i = p_i^2$.

4°. a) Montrons que la somme est directe :

Soit $(u_1, \ldots, u_m) \in \ker(f-\lambda_1 \mathrm{Id}) \times \cdots \times \ker(f-\lambda_m \mathrm{Id})$ tq

$u_1 + \cdots + u_m = 0_E$.

Soit $i \in [\![1,m]\!]$ fixé.

$p_i(u_1 + \cdots + u_m) = 0_E \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} p_i(u_j) = 0_E$. (1)

Or $u_j \in \ker(f-\lambda_j \mathrm{Id})$ et $p_i = L_i(f) = Q(f)\circ(f-\lambda_j \mathrm{Id})$.

si $i \neq j$

Donc $p_i(u_j) = 0_E$ si $i \neq j$.

De plus $\mathrm{Id}_E = p_1 + \cdots + p_m \Rightarrow u_i = \sum_{k=1}^{m} p_k(u_i)$

$= 0 + p_i(u_i)$

Donc $p_i(u_i) = u_i$

Par conséquent (1) $\Rightarrow u_i = 0_E$.

b) Mq $E = \sum_{i=1}^{m} \ker(f - \lambda_i Id_E)$:

On a $Id_E = p_1 + \longrightarrow + p_m$.

Donc $\forall x \in E$, $x = p_1(x) + \longrightarrow + p_m(x)$ avec $p_i(x) \in \ker(f - \lambda_i Id)$ d'après 2°.

D'où le résultat.

c) $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \ker(f - \lambda_i Id_E)$ et d'après b) $p_i(x)$ est la projection de x sur $\ker(f - \lambda_i Id_E)$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} \ker(f - \lambda_j Id_E)$

5° $F = \text{Vect}(p_1, \longrightarrow p_m)$.

Montrons que $(p_1, \longrightarrow p_m)$ est libre :

Soit $(\alpha_1, \longrightarrow \alpha_m) \in \mathbb{K}^n$ tq $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i = 0$

Alors $p_j \circ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (p_j \circ p_i) = 0$

$\Rightarrow \alpha_j p_j = 0$ car $p_j \circ p_i = 0$ si $i \neq j$, $p_j^2 = p_j$

$\Rightarrow \alpha_j = 0$.

$\longrightarrow$ pour tt $j \in [\![1, m]\!]$.

Par conséquent $\dim F = m$.

6° Hyp : $\lambda_1, \longrightarrow \lambda_m \in \mathbb{R}^+$.

Soit $h = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i \in F$.

$h^2 = f \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 p_i}_{\text{car } p_i \circ p_j = 0 \text{ si } j \neq i} = f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i$

Comme $(p_1, \dots, p_m)$ est libre,

$h^2 = f \iff \forall i \in [\![1, m]\!],\ \alpha_i^2 = \lambda_i$

$\iff \forall i \in [\![1, m]\!],\ \alpha_i = \pm\sqrt{\lambda_i}$ (possible car $\lambda_i \geq 0$).

Donc $\mathcal{R}(f) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \sqrt{\lambda_i}\, p_i,\ \varepsilon_i \in \{-1, 1\} \text{ pour } 1 \leq i \leq m \right\}$.

III. Hyp : $f^p = 0$, $f^{p-1} \neq 0$ càd f nilpotent d'indice p.

1°. Si $x_0 \in E$ vérifie $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$ avec $x_0 \neq 0_E$, on a $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ libre. (Vu en exercice).

Donc $p = \text{Cardinal}(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)) \leq n$.

Alors $f^n = f^p \circ f^{n-p} = 0$.

2°. Hyp : $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$ càd $\exists h \in \mathcal{L}(E)$, $h^2 = f$.

Alors $f^n = 0 \Rightarrow h^{2n} = 0$ et h nilpotent d'indice q.

D'après 1°. on a $h^n = 0 \Rightarrow q \leq n$.

De plus $f^{p-1} = h^{2p-2} \neq 0 \Rightarrow 2p-2 \leq q-1$ (cf 1°). ($h^{q-1} \neq 0$).

Donc $2p-2 \leq n-1$, càd $2p-1 \leq n$.

3°. $DL_n(0)$ de $\sqrt{1+x}$:

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\right)\frac{x^2}{2} + \dots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)\frac{x^k}{k!} + O(x^n)$$

$(a_n x^n + o(x^n) = O(x^n))$

4°. $\sqrt{1+x} = P_n(x) + O(x^n) = P_n(x) + x^n \theta(x)$ avec θ bornée au voisinage de 0.

Alors $1 + x = P_n^2(x) + 2x^n \theta(x) P_n(x) + x^{2n}\theta^2(x)$

Donc $P_n^2(x) - x - 1 = x^n \underbrace{\left(-2\theta(x)P_n(x) - x^n\theta^2(x)\right)}_{\eta(x)}$.

P_n est C^0 sur $[-1,1]$ donc bornée sur $[-1,1]$.

θ est bornée sur un voisinage de 0 : $\exists M$, $\exists \alpha \in]0,1[$, $\forall x \in [-\alpha,\alpha]$, $|\theta(x)| \leq M$

Alors $\forall x \in [-\alpha,\alpha]$, $|\eta(x)| \leq 2|\theta(x)||P_n(x)| + |x|^n \theta^2(x)$

$\leq 2M \|P_n\|_{\infty,[-1,1]} + M^2$.

η est bien bornée au voisinage de 0.

$\longrightarrow$ On en déduit que $x \mapsto \dfrac{P_n^2(x) - x - 1}{x^n} = \eta(x)$ est bornée sur $]0,\alpha]$.

Or $\deg P_n = n-1 \Rightarrow \deg(P_n^2 - X - 1) = 2n-2$

$$P_n^2 - X - 1 = \sum_{k=0}^{2n-2} b_k X^k.$$

$b_0 \neq 0 \Rightarrow \dfrac{P_n^2(x) - x - 1}{x^n} \sim \dfrac{b_0}{x^n}$ non borné si $x \to 0^+$

car $\left|\dfrac{b_0}{x^n}\right| \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

De même si $(b_0, \dots, b_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$, $\dfrac{P_n^2(x) - x - 1}{x^n} \sim \dfrac{b_j}{x^n}$

avec $j = \min\{k \in [\![0, n-1]\!],\ b_k \neq 0\}$

Non borné si $x \to 0$.

Par conséquent $P_n^2 - X - 1 = \sum_{k=n}^{2n-2} b_k X^k = X^n \underbrace{\sum_{k=n}^{2n-2} b_k X^{k-n}}_{\in \mathbb{R}[X]}$

5°. $P_n^2 - X - 1 = X^n U(X)$.

$\Rightarrow P_n^2(f) - f - Id_E = f^n \circ U(f)$

Or $f^n = 0$, donc $P_n^2(f) = (P_n(f))^2 = f + Id_E$.

$P_n(f) \in \mathcal{R}(f + Id_E)$.

Spé PSI*
Année 2026-2027

Corrigé DS n°2

Problème 2 (Centrale PC 2019)

I. A. 1° $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont non vides (contiennent la matrice nulle) et stables par combinaison linéaire.
Donc ce sont des sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soient $A, B \in T_n(\mathbb{K})$ et $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associés.
On a alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j)$ stable par f et par g pour $\forall j \in [\![1, n]\!]$,
avec $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Donc $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $(f \circ g)(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j)) \subset f(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j))$
$\subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j)$.
On en déduit que $AB = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g) \in T_n(\mathbb{K})$.
De même $A \in T_n^+(\mathbb{K}) \iff \forall j \in [\![1, n]\!]$, $f(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j))$
$\subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{j-1})$
en notant $e_0 = 0_E$. (on a $f(e_1) = 0_E$ / $f(e_2) \in \mathrm{Vect}(e_1)$ etc...).
Donc si $A, B \in T_n^+(\mathbb{K})$, on a :
$(f \circ g)(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j)) \subset f(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{j-1}))$
$\subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{j-2})$ pour $j \geqslant 2$
et $(f \circ g)(e_1) = (f \circ g)(e_2) = 0_E$.
D'où $AB \in T_n^+(\mathbb{K})$.

2°. $S_2(\mathbb{K})$ et $A_2(\mathbb{K})$ sont des sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Par contre $(AB)^T = B^T A^T = BA$ si $A, B \in S_2(\mathbb{K})$.
Or $S_2(\mathbb{K})$ n'est pas commutatif, donc a priori $S_2(\mathbb{K})$ n'est pas stable pour le produit.
Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \notin S_2(\mathbb{K})$.
$S_2(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

De même pour $A_2(\mathbb{K})$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\notin A_2(\mathbb{K})$.

3°. Soit $n \geq 3$. $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ ne sont pas stables pour le produit matriciel :

On peut reprendre les contre-exemples précédents en ajoutant des blocs de 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\notin S_n(\mathbb{K})$.

De même pour $A_n(\mathbb{K})$.

I-B

4°. • $\mathcal{C}\!\!\mathcal{O}_F$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$.

En effet $\tilde{0} \in \mathcal{C}\!\!\mathcal{O}_F$ et pour $(f,g) \in \mathcal{C}\!\!\mathcal{O}_F^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$,

$\forall x \in F$, $(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \underbrace{f(x)}_{\in F} + \mu \underbrace{g(x)}_{\in F} \in F$

Donc $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}\!\!\mathcal{O}_F$.

• $\mathcal{C}\!\!\mathcal{O}_F$ est stable pour la loi $\circ$:

$\forall (f,g) \in \mathcal{C}\!\!\mathcal{O}_F^2$, $(f \circ g)\langle F \rangle = f\langle g\langle F \rangle\rangle \subset f\langle F \rangle$ car $g \in \mathcal{C}\!\!\mathcal{O}_F$

et $f\langle F \rangle \subset F$ car $f \in \mathcal{C}\!\!\mathcal{O}_F$.

5°. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F que l'on complète en $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Alors $u \in \mathcal{C}\!\!\mathcal{O}_F \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \overbrace{A}^{p} & \overbrace{B}^{n-p} \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{matrix} \}p \\ \}n-p \end{matrix}$

$A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

Donc $\mathcal{C}_f$ est isomorphe au sev des matrices triangulaires par blocs de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ (A : $p\times p$, B : $p\times(n-p)$, C : $(n-p)\times(n-p)$), de dimension égale à

$$p^2 + p(n-p) + (n-p)^2 = \dim \mathcal{T}_p(\mathbb{K}) + \dim \mathcal{T}_{p,n-p}(\mathbb{K}) + \dim \mathcal{T}_{n-p}(\mathbb{K}).$$

Càd $\dim \mathcal{C}_f = p^2 - np + n^2$.

6°. Soit $\varphi(x) = x^2 - nx + n^2$ pour $x \in [1, n-1]$.

$\varphi'(x) = 2x - n = 0 \iff x = \frac{n}{2} \in [1, n-1]$

x	1	$\nearrow$ $n/2$	$\searrow$ $n-1$
$\varphi(x)$			

$\varphi(1) = n^2 - n + 1$ et $\varphi(n-1) = n^2 - n(n-1) + (n-1)^2$
$= n^2 - n + 1$.

Donc $\max_{1\le p\le n-1} (n^2 - pn + p^2) = n^2 - n + 1$ atteint pour $p = 1$ et $p = n-1$.

II. A. 10°. $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour $n \ge 3$.

- Si $n=2$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^2 = I_2$.
- $J^2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^2)$ avec $\varphi^2(e_j) = e_{j+2}$ pour $j \le n-2$
  $\varphi^2(e_{n-1}) = e_1$ et $\varphi^2(e_n) = e_2$.

Si $n > 2$

Donc $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_{n-2} & 0 \end{pmatrix}$ (I_2 : 2×2, I_{n-2} : $(n-2)\times(n-2)$).

11°. Soit $n \geq 3$ et $k \in [\![2, n-1]\!]$.

$$\begin{cases} \varphi^k(e_j) = e_{j+k} & \text{si } j \leq n-k \\ \varphi^k(e_j) = e_{j+k-n} & \text{si } n-k+1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Donc $J^k = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ I_{n-k} & 0 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $J^n = I_n$.

12°. $J(a_0, \longrightarrow a_{n-1}) = a_0 I_n + a_1 J + a_2 J^2 + \cdots + a_{n-1} J^{n-1}$.

13°. $(I_n, J, \cdots, J^{n-1})$ est une famille génératrice de $\mathcal{C}$.

De plus $\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = 0 \iff J(a_0, \longrightarrow a_{n-1}) = 0$

$\iff \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ a_k = 0$.

Donc $(I_n, J, \longrightarrow J^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On en déduit que c'est une base de $\mathcal{C}$.

14°. • M commute avec tt elt de $\mathcal{C} \Longrightarrow MJ = JM$ car $J \in \mathcal{C}$.

• $MJ = JM \Longrightarrow \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ MJ^k = J^k M$

$\Longrightarrow \forall (a_0, \longrightarrow a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ M J(a_0, \longrightarrow a_{n-1}) = J(a_0, \longrightarrow a_{n-1}) M$.

D'où le résultat.

15°. On a prouvé que $\mathcal{C} = \{ P(J),\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \}$.

Or $\forall P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P(J) \cdot Q(J) = (PQ)(J)$

$= (QP)(J) \in \mathcal{C}$.

$= Q(J) \cdot P(J)$.

et $J^n = I_n$

$\Rightarrow \forall k \geq n,\ J^k \in \mathrm{Vect}(I_n, J, \longrightarrow J^{n-1})$.

$\mathcal{C} = \mathbb{R}[J]$

31°. Si les seuls sev de E stables par tous les elts de $\mathcal{C}$ sont $\{0_E\}$ et E, d'après le thm de Burnside, $\mathcal{C} = \mathcal{L}(E)$.
Or par hyp. tous les elts de $\mathcal{C}$ sont nilpotents ; D'où la contradiction car par exemple $Id_E \in \mathcal{L}(E)$ et n'est pas nilpotent.
Par conséquent il existe V sev de E, $V \neq \{0\}$ et $V \subsetneq E$, stable par tous les elts de $\mathcal{C}$.
On pose $r = \dim V$ et W un supplémentaire de V dans E.

32°. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \to e_r, e_{r+1}, \to e_n)$ adaptée à $V \oplus W$, càd $(e_1, \to e_r)$ base de V et $(e_{r+1}, \to e_n)$ base de W.
Alors pour tt $u \in \mathcal{C}$, V est stable par u, donc

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix} \begin{matrix} \}r \\ \}n-r \end{matrix}$$
$$\underbrace{\qquad}_{r} \quad \underbrace{\qquad}_{n-r}$$

$A(u) = Mat_{(e_1, \to e_r)}(u/V)$ où u/V est l'endom. induit de u sur V.

Soit p projecteur sur W parallèlement à V.
Alors $D(u) = Mat_{(e_{r+1}, \to e_n)}(p \circ (u/W))$ avec $p \circ (u/W) \in \mathcal{L}(W)$.

33°. Soient $(u, v) \in \mathcal{C}^2$.
Dans la base $\mathcal{B}$ précédente, on a alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ Mat_{\mathcal{B}}(\lambda u + v) = \begin{pmatrix} \lambda A(u) + A(v) & \lambda B(u) + B(v) \\ 0 & \lambda D(u) + D(v) \end{pmatrix}$$

Donc $A(\lambda u + v) = \lambda A(u) + A(v)$ et $D(\lambda u + v) = \lambda D(u) + D(v)$.

De même $A(u).A(v) = \underset{(e_1,\dots,e_r)}{\mathrm{Mat}}\left(u_{/V} \circ v_{/V}\right) = \underset{(e_1,\dots,e_r)}{\mathrm{Mat}}\left((uov)_{/V}\right)$

$= A(uov)$ avec $uov \in \mathcal{C}(u)$.

Donc $A(u).A(v) \in \{ A(f) / f \in \mathcal{C}(u) \}$ qui est bien une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$.

$D(u).D(v) = \underset{(e_{r+1},\dots,e_n)}{\mathrm{Mat}}\left(p\circ(u_{/W}) \circ p\circ(v_{/W})\right)$

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(uov) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A(v) & B(v) \\ 0 & D(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(u)A(v) & A(u)B(v)+B(u)D(v) \\ 0 & D(u)D(v) \end{pmatrix}$$

Donc $D(u)D(v) = D(uov)$ avec $uov \in \mathcal{C}(u)$.

On a aussi $\forall k \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A(u)^k & B(u^k) \\ 0 & D(u)^k \end{pmatrix}$

(produit triangulaire par blocs). $= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^k)$.

u nilpotent $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*$, $u^k = 0$.

$\Rightarrow A(u)^k = 0$ et $D(u)^k = 0$.

Donc $A(u)$ est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$

$D(u)$ ——————— $\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C})$.

34° De ce qui précède, on obtient que :

$\{ u_{/V} / u \in \mathcal{C}(u) \}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(V)$ formée d'endom. nilpotents.

$\{ p\circ(u_{/W}) / u \in \mathcal{C}(u) \}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(W)$ formée d'endom. nilpotents.

De plus $\dim V \geq 1$ et $\dim V \leq n-1$ $\Rightarrow \begin{cases} r \leq n-1 \\ s \leq n-1. \end{cases}$

On peut appliquer l'hyp. de récurrence à ces deux sous-algèbres : elles sont trigonalisables.
Donc il existe B_1 base de V tq $\forall u \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Mat}_{B_1}(u_{/V}) \in T_r(\mathbb{C})$.

Il existe B_2 base de W tq $\forall u \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Mat}_{B_2}(p_0(u_{/W})) \in T_{n-r}(\mathbb{C})$.

Soit $B' = B_1 \cup B_2$ base de E.

Alors $\forall u \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Mat}_{B'}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{B_1}(u_{/V}) & ? \\ 0 & \mathrm{Mat}_{B_2}(p_0(u_{/W})) \end{pmatrix}$

est triangulaire supérieure.

→ On peut aussi raisonner matriciellement :

Par hyp de récurrence $\exists P \in GL_r(\mathbb{C})$, $\forall u \in \mathcal{C}$, $P^{-1}A(u)P \in T_r(\mathbb{C})$

$\exists Q \in GL_{n-r}(\mathbb{C})$, $\forall u \in \mathcal{C}$, $Q^{-1}D(u)Q \in T_{n-r}(\mathbb{C})$

On pose $R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

R est inversible d'inverse $R^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$.

$$\forall u \in \mathcal{C},\quad R^{-1}\,\mathrm{Mat}_B(u)\cdot R = \begin{pmatrix} P^{-1}A(u)P & P^{-1}B(u)Q \\ 0 & Q^{-1}D(u)Q \end{pmatrix}$$

Donc le résultat. — triangulaire supérieure

35°. On reprend la base B' de la question précédente.

$$\forall u \in \mathcal{C},\quad \mathrm{Mat}_{B'}(u) = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix} \in T_n(\mathbb{C}).$$

u nilpotente $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*$, $u^k = 0$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*$, $t_{11}^k = \cdots = t_{nn}^k = 0$

$\Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]$, $t_{ii} = 0$.