PSI* 2023/24 DS 1

Vitesses de convergence. Théorème taubérien

Problème I - Vitesses de convergence

L'objet du problème est une étude de la vitesse de convergence de suites réelles. On utilisera les notations suivantes :

— $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels ;

— $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'espace vectoriel des suites définies sur $\mathbb{N}$ à valeurs réelles ;

— E désigne le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes telles que

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geq N,\ u_k \neq \lim_{n\to\infty} u_n$$

— à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E et de limite égale à ℓ, on associe la suite $(u_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir d'un certain rang par

$$u_n^c = \left|\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right|$$

— E^c désigne l'ensemble des éléments $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telles que $(u_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente ;

— soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à E^c et soit ℓ^c la limite de $(u_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$; on dit que la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

  — lente si $\ell^c = 1$,

  — géométrique de rapport ℓ^c si $\ell^c \in]0,1[$,

  — rapide si $\ell^c = 0$;

— soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à E et de limite égale à ℓ, et soit r un réel strictement supérieur à 1 ; on dit que la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ est d'ordre r si la suite définie à partir d'un certain rang par $\dfrac{u_{n+1}-\ell}{|u_n-\ell|^r}$ est bornée ;

— on rappelle qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0}$.

— on rappelle, et on pourra utiliser directement, l'inégalité $\ln(1+h) < h$ pour $h \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$.

A - Exemples de calcul de vitesse de convergence

A.1. Soit k un entier strictement positif et q un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. Montrer que les suites $\left(\dfrac{1}{(n+1)^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(n^k q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E^c et donner leur vitesse de convergence.

A.2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)^{2^n}$.

a) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $v_n = e - \dfrac{e}{2^{n+1}} + o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

b) Montrer que la suite (v_n) appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

A.3.

a) On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x}\,\mathrm{d}x$.
Montrer que la suite (I_n) est bien définie et appartient à E.

b) Montrer que la suite de fonctions $f_n : x \mapsto n\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction que l'on précisera.

c) Montrer que la suite (nI_n) admet une limite. En déduire la vitesse de convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

A.4. Soit α un réel strictement supérieur à 1. La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge vers un réel que l'on notera ℓ.

On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $S_0 = 0$ et $\forall n \geq 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

a) Montrer que $\forall n \geq 1$, $\dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \ell - S_n \leq \dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.

b) En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

B - Des résultats généraux

B.1. L'ensemble E^c est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

B.2. Montrer que E^c est strictement inclus dans E.

B.3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E^c. Montrer que ℓ^c appartient au segment $[0,1]$.

C - Vitesse de convergence d'ordre r d'une suite réelle

C.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E dont la vitesse de convergence est d'ordre r, où r est un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est rapide.

C.2.

a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est un élément de E. On note s la limite de cette suite.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{1}{(n+1)!} \leq s - S_n \leq \dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$.

c) En déduire que la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est rapide.

d) Soit r un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers s n'est pas d'ordre r.

C.3. On considère I un intervalle réel de longueur strictement positive, f une application définie sur I à valeurs dans I et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément ℓ de I et que f est dérivable en ℓ.

a) Montrer que $f(\ell) = \ell$.

b) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire alors elle appartient à E^c. Donner sa vitesse de convergence en fonction de $f'(\ell)$.

c) Montrer que si $|f'(\ell)| > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

d) Soit r un entier supérieur ou égal à 2. On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^r$ sur I et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire. Montrer que la vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est d'ordre r si et seulement si $\forall k \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$, $f^{(k)}(\ell) = 0$.

Problème II
Théorème taubérien de Hardy-Littlewood-Karamata

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0,+\infty[$. On admettra la formule suivante

$$K = \lim_{h\to 0^+} \int_h^{+\infty} \frac{e^{-w}}{\sqrt{w}}\,\mathrm{d}w = \sqrt{\pi}.$$

Note : il s'agit d'une "intégrale convergente à la borne 0" qu'on peut ramener à l'intégrale classique de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

A. Étude de deux séries de fonctions

Dans toute cette partie, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}e^{-nx}$.

1. Montrer que f et g sont définies sur I.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur I, avec $f' = -g$.
3. Montrer que pour tout $x \in I$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leq f(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.
   En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0$, faisant intervenir K.
4. Montrer que la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geq 1}$ converge.
5. Démontrer que pour tout $x > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) e^{-nx}$ converge et exprimer sa somme $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in I$.
6. En déduire un équivalent de $h(x)$ lorsque $x \to 0$. Montrer alors que $g(x)$ est équivalent à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ lorsque $x \to 0$.

B. Séries associées à des ensembles d'entiers

À toute partie $A \subset \mathbb{N}$ on associe la suite (a_n) définie par

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $I_A = \left\{ x \geq 0, \sum_{n\geq 0} a_n e^{-nx} \text{ converge} \right\}$. On pose $f_A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}$ pour tout $x \in I_A$.

Enfin, sous réserve d'existence, on pose $\Phi(A) = \lim_{x\to 0} x f_A(x)$ et on note S l'ensemble des parties $A \subset \mathbb{N}$ pour lesquelles $\Phi(A)$ existe.

7. Quel est l'ensemble I_A si A est fini ? Si $A = \mathbb{N}$?
8. Si A est infini, montrer que l'on peut extraire une suite $(b_n = a_{\phi(n)})$ de la suite (a_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$. Déterminer I_A dans ce cas.
9. Soit $A \subset \mathbb{N}$ et (a_n) la suite associée. Pour tout entier naturel n, on note $A(n)$ l'ensemble des éléments de A qui sont $\leq n$. Vérifier que pour tout $x > 0$ la série $\sum_{n\geq 0} \mathrm{Card}(A(n))e^{-nx}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Card}(A(n))e^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1-e^{-x}}$$

Dans la question suivante, $A = A_1$ désigne l'ensemble des carrés d'entiers naturels non nuls.

10. Montrer que si $x > 0$, $\dfrac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lfloor \sqrt{n} \rfloor e^{-nx}$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

    En déduire un encadrement de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx} - \dfrac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}}$, puis un équivalent de f_{A_1} en 0. Prouver alors que $A_1 \in S$ et donner $\Phi(A_1)$.

C. Étude de deux séries de fonctions

Soit $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs tels que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n e^{-nx}$ converge. On suppose que

$$\lim_{x\to 0} \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \right) = \ell \in [0, +\infty[.$$

On note E l'espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, qui sont continues sur $[0,1]$.

On sait que pour $\psi \in E$, $\|\psi\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\psi(t)|$ est bien définie et on munit E de la norme $\| \ \|_\infty$ ainsi définie (on ne demande pas de vérifier que c'est une norme).

Si $\psi \in E$, on note $L(\psi)$ l'application qui à $x > 0$ associe

$$(L(\psi))(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \psi(e^{-nx}).$$

11. Montrer que $L(\psi)$ est bien définie pour tout $\psi \in E$ et que l'application L est une application linéaire de E (dans l'espace des fonctions sur $]0,1]$). Vérifier que pour tous ψ_1, ψ_2 dans E, $\psi_1 \leq \psi_2$ entraîne $L(\psi_1) \leq L(\psi_2)$.

On note E_1 l'ensemble des $\psi \in E$ pour lesquels $\lim\limits_{x\to 0} x(L(\psi))(x)$ existe et si $\psi \in E_1$, on pose

$$\Delta(\psi) = \lim_{x\to 0} x(L(\psi))(x)$$

12. Vérifier que E_1 est un sous espace vectoriel de E et que l'application Δ est une forme linéaire sur E_1. Montrer qu'elle est ℓ-lipschitzienne pour $\| \ \|_\infty$), c'est-à-dire

$$\forall (\psi, \phi) \in (E_1)^2, |\Delta(\psi) - \Delta(\phi)| \leq \ell \|\psi - \phi\|_\infty$$

13. Soit la fonction constante $e_0 : t \in [0,1] \mapsto 1$; montrer que $L(e_0)$ est continue sur $]0,1]$ et que $x \mapsto xL(e_0)(x)$ est prolongeable par continuité à $[0,1]$.
14. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $e_p : t \in [0,1] \mapsto t^p$ appartient à E_1 et calculer $\Delta(e_p)$. En déduire que toute fonction polynôme P est dans E_1 et calculer $\Delta(P)$ pour une telle fonction.
15. On admet le théorème de Weierstrass : "toute fonction continue sur un segment est la limite d'une suite de fonctions polynôme qui converge uniformément sur ce segment".

    En déduire que $E \subset E_1$ et calculer $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E$.

• On admettra que la propriété précédente est encore vraie pour les fonctions qui seraient "continues par morceaux". On considère maintenant la fonction ψ définie sur $[0,1]$ par la formule :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{e}[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [\frac{1}{e}, 1]. \end{cases}$$

16. Calculer $(L(\psi))(\frac{1}{N})$ pour tout entier $N > 0$ et en déduire la limite $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{1}{N} \sum\limits_{k=0}^{N} \alpha_k$ (théorème taubérien).