PSI* 2023/24 DL 2

Nombres de Bernoulli, de la tangente aux permutations

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de trois parties.

Dans la partie I, on définit une suite $(\alpha_n)_n$ d'entiers naturels via le développement en série entière d'une fonction auxiliaire et on s'intéresse en particulier à la suite extraite $(\alpha_{2n+1})_n$ formée des termes de rang impair.

Dans la partie II, on détermine un équivalent, lorsque n tend vers l'infini, de α_{2n+1} en faisant appel à des outils analytiques et notamment la fonction zêta de Riemann.

Dans la partie III, on définit les permutations alternantes. On procède d'abord à leur dénombrement, avant de s'intéresser à des aspects probabilistes.

La partie II fait appel, très ponctuellement, à des résultats de la partie I. La partie III utilise des résultats des parties I et II.

I. Introduction d'une fonction auxiliaire

Soit l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi/2[$. On considère la fonction f définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}.$$

On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f et, par convention, $f^{(0)} = f$.

I.A - Dérivées successives

1. Exprimer les dérivées f', et f'' à l'aide des fonctions usuelles.
2. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

   On explicitera les polynômes P_0, P_1, P_2, et, pour tout entier naturel n, on exprimera P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.
3. Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels.
4. Montrer

$$\forall x \in I, \quad 2f'(x) = f(x)^2 + 1.$$

   Pour tout entier naturel n, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$.
5. Montrer $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.$$

I.B - Développement en série entière

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_n}{n!}x^n$ et g sa somme.

6. A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer
$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi/2], \quad \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!}x^n \leq f(x).$$
7. En déduire la minoration $R \geq \pi/2$.
8. Montrer
$$\forall x \in I, \quad 2g'(x) = g(x)^2 + 1.$$
9. Montrer
$$\forall x \in I, \quad f(x) = g(x).$$
Considérer les fonctions $\arctan f$ *et* $\arctan g$.
10. En déduire que $R = \pi/2$.

I.C - Partie paire et partie impaire du développement en série entière

11. Justifier que toute fonction $h : I \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique sous la forme $h = p + i$ avec $p : I \to \mathbb{R}$ une fonction paire et $i : I \to \mathbb{R}$ une fonction impaire.
12. En déduire
$$\forall x \in I, \quad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} \qquad \text{et} \quad \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!}x^{2n}.$$

On note t la fonction définie sur I par $t(x) = \tan(x)$.

13. Pour tout entier naturel n, exprimer $t^{(n)}(0)$ en fonction des réels $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
14. Rappeler, sans justification, l'expression de t' en fonction de t.
15. En déduire
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1}\alpha_{2n-2k+1}.$$

II. Equivalent de α_{2n+1}

II.A - La fonction zêta

Pour tous $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

16. Montrer que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.
17. Encadrer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ par deux intégrales et en déduire $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1$.
18. Déterminer $C(s)$ tel que
$$\forall s \in]1, +\infty[, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} = C(s)\zeta(s).$$

II.B - Une formule pour la fonction cosinus

Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose $I_n(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(2xt)(\cos t)^n dt$.

19. Montrer
$$\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) I_n(x) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x) \qquad \text{et} \quad \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) \frac{I_n(x)}{I_n(0)} = \frac{I_{n-2}(x)}{I_{n-2}(0)}.$$
20. Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\pi x) = \pi x \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$
21. En déduire
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, 1[, \quad \cos(\pi x) = \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)} \frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)} \prod_{p=1}^{n} \left(1 - \frac{4x^2}{(2p-1)^2}\right).$$

II.C - Un autre développement de tangente

Dans toute cette sous-partie II.C, on pose $J = [0, 1/2[$ et, pour tout entier naturel n et tout réel x de J,

$$S_n(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2^{2p+1} x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}} \right).$$

22. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall s \in]1, +\infty[, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} \leq \frac{1}{2(s-1)} \frac{1}{(2n-1)^{s-1}}.$$

23. Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction S_n est définie sur J.
24. Montrer que la suite (S_n) converge simplement sur J vers la fonction nulle.
25. En dérivant $x \mapsto \ln(\cos(\pi x))$, montrer

$$\forall x \in J, \quad \pi \tan(\pi x) = -\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{8x}{(2k-1)^2} \frac{1}{1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2}}.$$

26. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in J, \quad \pi \tan(\pi x) + S_n(x) = -\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{p=1}^{+\infty} 2(2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1}.$$

27. Montrer l'inégalité $t \cos t \leq \sin t$, pour tout $t \in [0, \pi/2]$.
28. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \quad 0 \leq -I'_n(x) \leq \frac{4x}{n} I_n(x)$$

puis, pour $x \in [0,1]$, la limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{I'_n(x)}{I_n(x)}$.

29. En déduire l'égalité

$$\forall x \in J, \quad \pi \tan(\pi x) = \sum_{p=1}^{+\infty} 2(2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1}.$$

II.D - Un équivalent de α_{2n+1}

30. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{2n+1} = \frac{2(2^{2n+2}-1)(2n+1)!}{\pi^{2n+2}} \zeta(2n+2).$$

31. En déduire un équivalent de α_{2n+1} lorsuqe n tend vers l'infini.

III. Permutations alternantes

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une liste de n nombres réels. On dit que la liste $(x_1, \dots, x_n)$ est alternante montante si $(-1)^i(x_i - x_{i-1}) > 0$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$. On dit qu'elle est alternante descendante si $(-1)^i(x_i - x_{i-1}) < 0$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$.

Autrement dit, la liste $(x_1, \dots, x_n)$ est alternante montante si elle vérifie les inégalités $x_1 < x_2 > x_3 < x_4 > \cdots$. Elle est alternante descendante si elle vérifie les inégalités inverses.

Par exemple, $(1, 5, 3, 11, 8, 9)$ est alternante montante car $1 < 5 > 3 < 11 > 8 < 9$ et $(7, 4, 5, 2, 12)$ est alternante descendante car $7 > 4 < 5 > 2 < 12$.

On dit qu'une permutation σ de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ est alternante montante (respectivement alternante descendante) si la liste $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ est alternante montante (respectivement alternante descendante).

Par exemple, avec $n = 7$ et en représentant toute permutation σ par la liste des images $(\sigma(1), \dots, \sigma(7))$, on constate que $(1, 5, 4, 6, 2, 7, 3)$ représente une permutation alternante montante et $(3, 2, 6, 4, 7, 1, 5)$ une permutation alternante descendante.

III.A - Dénombrement des permutations alternantes

32. Déterminer les permutations alternantes montantes de $[\![1,n]\!]$ pour $n=2$, $n=3$, $n=4$.
33. Montrer, pour tout $n \geq 2$, que le nombre de permutations alternantes montantes est égal au nombre de permutations alternantes descendantes.

Si $n \geq 2$, on note β_n le nombre de permutations alternantes montantes de $[\![1,n]\!]$ et on convient que $\beta_0 = \beta_1 = 1$.

34. Soient k et n deux entiers tels que $2 \leq k \leq n$ et A une partie à k éléments de $[\![1,n]\!]$. On considère les listes $(x_1,\ldots,x_k)$ constituées de k éléments deux à deux distincts de A. Montrer que le nombre de ces listes qui sont alternantes montantes est égal à β_k.

Le nombre de celles qui sont alternantes descendantes est le même, mais on ne demande pas de le justifier.

35. Montrer, pour tout entier $n \geq 1$, $2\beta_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\beta_k\beta_{n-k}$.
    Pour $k \in [\![0,n]\!]$, dénombrer les permutations σ alternantes (montantes ou descendantes) de $[\![1,n+1]\!]$ telles que $\sigma(k+1) = n+1$.
36. En déduire que $\beta_n = \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.B - Permuations aléatoires

Pour tout entier $n \geq 2$, on munit l'ensemble Ω_n des permutations de $[\![1,n]\!]$ de la probabilité uniforme. On note p_n la probabilité qu'une permutation dans Ω_n soit alternante montante. On convient de plus que $p_0 = p_1 = 1$.

37. Montrer que la suite (p_n) tend vers 0. Donner un équivalent de p_{2n+1} quand n tend vers l'infini.

On définit une variable aléatoire M_n sur Ω_n en associant à toute permutation $\sigma \in \Omega_n$ l'entier $M_n(\sigma)$ tel que :

— $M_n(\sigma) = 2$ si $\sigma(1) > \sigma(2)$;

— $M_n(\sigma) = 3$ si $\sigma(1) < \sigma(2) < \sigma(3)$;

— $M_n(\sigma) = 4$ si $\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) > \sigma(4)$;

— ...

— $M_n(\sigma) = n+1$ si σ est alternante montante.

En d'autres termes, $M_n(\sigma) = k+1$ où k est le plus grand entier tel que $(\sigma(1),\ldots,\sigma(k))$ soit alternante montante. On note $E(M_n)$ l'espérance de M_n.

38. Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, montrer $P(M_n > i) = p_i$.
39. Exprimer $E(M_n)$ en foncion de p_0, p_1, ..., p_n. En déduire $\lim_{n\to+\infty} E(M_n) = \frac{\sin(1)+1}{\cos(1)}$.