PSI* 2023/24 DL 4

Polynômes de Hilbert

Mini DL pour la rentrée. Ceux qui veulent des trucs en plus : sur cahier de prepa.

Si $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathbb{C}_n[X]$ l'espace des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à n.

Pour P dans $\mathbb{C}[X]$, soit $T(P)$ le polynôme $P(X+1)$. L'application T ainsi définie est clairement un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$. De plus, si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par T et on note T_n l'endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ induit par T.

Soit $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Hilbert, définie par :

$$H_0 = 1 \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}^*, H_i = \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k).$$

Le problème porte sur l'étude des polynômes de Hilbert, ce qui permet notamment de déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$.

Soit n dans $\mathbb{N}$.

A- Inversion d'une matrice

A.1) Écrire la matrice M_n de T_n dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{C}_n[X]$.

A.2) Vérifier que M_n est inversible ; expliciter M_n^{-1}.

B- Propriétés de la suite $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$

B.1) Montrer que $(H_i)_{0\le i\le n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

B.2) Si $j \in \mathbb{Z}$ et $i \in \mathbb{N}^*$, donner une expression simple de $H_i(j)$ montrant que $H_i(j)$ est dans $\mathbb{Z}$. On distinguera les trois cas : $j < 0$, $0 \le j \le i-1$ et $j \ge i$.

C- Polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$

Soit P dans $\mathbb{C}_n[X]$. On décompose P sur $(H_i)_{0\le i\le n}$ en $P = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i$.

C.1) Vérifier l'égalité suivante : $\begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = M_n^{\top} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

C.2) Établir : $\forall i \in \{0, \ldots, n\}, a_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j}\binom{i}{j}P(j)$.

Si $i \ge n+1$, que vaut $\sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j}\binom{i}{j}P(j)$?

C.3) Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\forall i \in \{0, \ldots, n\}, P(i) \in \mathbb{Z}$

b) $\forall i \in \{0, \ldots, n\}, a_i \in \mathbb{Z}$

c) $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$

En particulier les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ sont les combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des polynômes de Hilbert.

D- Description des suites de la forme $(P(j))_{j\in\mathbb{N}}$ où P est un polynôme.

Soit $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) il existe $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que : $\forall j \in \mathbb{N}, u_j = P(j)$

b) $\forall i \in \mathbb{N}, i \ge n+1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j}\binom{i}{j}u_j = 0$.