PSI* 2023/24 DL 6

Comparaison de normes définies par des intégrales

Notations et but du problème

E_0 est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant $f(0) = 0$.

E_1 est l'ensemble des fonctions f appartenant à E_0 et telles que la fonction $t \mapsto \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

E_2 est l'ensemble des fonctions f appartenant à E_0 et telles que la fonction $t \mapsto (f'(t))^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On note

$N_1(f) = \left[\int_0^{+\infty} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t\right]^{1/2}$ pour $f \in E_1$; $N_2(f) = \left[\int_0^{+\infty} (f'(t))^2 \mathrm{d}t\right]^{1/2}$ pour $f \in E_2$.

Le but du problème est de comparer les ensembles E_1 et E_2 d'une part, les fonctions N_1 et N_2 d'autre part.

Partie I - Un exemple

Dans cette partie on suppose que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right).$$

1. Montrer que f est élément de E_2. Quelle est la valeur de $N_2(f)$?
2. Montrer que f appartient à E_1.
3. **Calcul d'une intégrale.**
   (a) Justifier l'existence de $J = \int_0^1 \frac{-\ln t}{1-t^2} \mathrm{d}t$.
   (b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto -t^{2k}\ln t$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$; expliciter la valeur de $J_k = \int_0^1 \left(-t^{2k}\ln t\right) \mathrm{d}t$.
   (c) Justifier avec soin l'égalité $J = \sum_{k=0}^{+\infty} J_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(-t^{2k} lnt\right) \mathrm{d}t$.
   (d) Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale J, sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
4. **Calcul de $N_1(f)$.**

   Pour simplifier on note $I = [N_1(f)]^2 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.

   (a) Montrer que $I = 2\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}} \mathrm{d}t$.
   (b) Justifier le changement de variable $u = f(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$ dans l'intégrale obtenue dans la question I.4.1 ; que devient I quand on effectue ce changement ?
   Prouver enfin que $I = 4J$ par un nouveau changement de variable.
   (c) En déduire la valeur de $N_1(f)$, puis celle de $\frac{N_1(f)}{N_2(f)}$.

Partie II - Comparaison générale

Le but de cette partie est de comparer, d'une part les ensembles E_1 et E_2, d'autre part les fonctions N_1 et N_2.

1. Soit f une fonction quelconque appartenant à E_0 (donc de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $f(0)=0$). On associe à f deux fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t)=\dfrac{f(t)}{\sqrt{t}}$ et $h(t)=\dfrac{f(t)}{t}$ pour tout $t>0$. On pose $\alpha=f'(0)$.
   (a) Quelle est la limite de $h(t)$ (respectivement de $g(t)$) quand $t\to 0^+$?
   (b) Exprimer $f'(t)-\sqrt{t}g'(t)$ en fonction de $h(t)$ lorsque $t\in\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Quelle est la limite de $\sqrt{t}g'(t)$ (respectivement de $g(t)\times g'(t)$) lorsque $t\to 0^+$?
   (on exprimera les résultats en fonction de $\alpha=f'(0)$).
   (d) Établir, pour $x>0$, la relation :
   $$(R)\ :\quad \int_0^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(g(x))^2+\int_0^x\left(\sqrt{t}g'(t)\right)^2\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int_0^x (h(t))^2\,\mathrm{d}t$$
   (après avoir justifié l'intégrabilité de chacune des fonctions qui interviennent).
2. **Comparaison de E_1 et E_2.**
   (a) Déduire de la relation (R) l'inclusion $E_2\subset E_1$.
   (b) Les ensembles E_1 et E_2 sont-ils égaux ? (On pourra considérer la fonction $t\mapsto \sin t$)
3. **Comparaison de N_1 et N_2.**
   (a) Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E_0.
   On admettra sans justification que N_1 et N_2 sont des normes sur l'espace vectoriel E_2.
   (b) Justifier l'inégalité $N_1(f)\le 2N_2(f)$, pour $f\in E_2$.
   (c) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction f_n par $f_n(t)=e^{-t}\sin(nt)$.
   Vérifier que $f_n\in E_2$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et calculer $N_2(f_n)$.
   (d) Peut-on trouver une constante K telle que pour tout $f\in E_2$, on ait $N_2(f)\le K.N_1(f)$?
4. Soit f appartenant à E_2 ; en utilisant la relation (R) montrer que $g(t)$ admet une limite lorsque $t\to+\infty$; quelle est cette limite ?