PSI* 2023/24 DL 7

Inégalités d'interpolation entre dérivées

Préliminaires

On rappelle qu'une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bornée par un réel $K > 0$ si la fonction $|\varphi|$ est majorée par K :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| \leq K.$$

1) Soit m un entier supérieur ou égal à 1. En calculant de deux façons différentes le développement limité à l'ordre m à l'origine de la fonction $(e^x - 1)^m$, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \binom{k}{m} k^j = \begin{cases} 0 \text{ si } j \text{ est un entier entre 1 et } m-1 \\ m! \text{ si } j = m \end{cases}$$

2) Prouver que si (u_k) est une suite croissante de réels strictement positifs et k, n des entiers tels que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$(u_1 u_2 \ldots u_k)^n \leq (u_1 u_2 \ldots u_n)^k.$$

Partie I

I.A - Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_2.

I.A.1) En écrivant, pour $h > 0$, l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x + h$ et entre x et $x - h$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}.$$

I.A.2) En déduire que f' est bornée par $\sqrt{2M_0M_2}$.

I.B -

I.B.1) Montrer de même que, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et de classe $\mathcal{C}^3$ par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que f et $f^{(3)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_3, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \left(9M_0^2 M_3\right)^{1/3}.$$

I.B.2) f'' est-elle également bornée sur $\mathbb{R}$?

Dans toute la suite du problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Partie II

Soit f une fonction, non constante, de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_n.

II.A - En utilisant la question 1) du préliminaire ainsi que l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n appliquée à la fonction f entre les valeurs x et $x + h$ pour $h = 1, 2, \ldots, n-1$, montrer que la fonction $f^{(n-1)}$ est, elle aussi, bornée sur $\mathbb{R}$.

II.B - En déduire que toutes les dérivées $f^{(k)}$ sont bornées pour $0 \leq k \leq n$. On note alors $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|f^{(k)}(x)\right|$.

II.C -

II.C.1) Montrer que pour tout entier k tel que $0\leq k\leq n$, on a $M_k > 0$.

II.C.2) En utilisant la suite finie $(u_k)_{1\leq k\leq n}$ avec $u_k = 2^{k-1}\dfrac{M_k}{M_{k-1}}$, en déduire que pour tout entier k entre 0 et n, on a :

$$M_k\leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}.$$

Est-ce la meilleure majoration possible ?