

# Théorème de Perron Frobenius

*A rendre avant les vacances. Faire jusqu'à la question 9 incluse, et au-delà pour qui veut.*

Dans le problème,  $n$  est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $\llbracket 1, n \rrbracket$  désigne l'ensemble des nombres entiers compris entre 1 et  $n$ .

$\mathbb{C}$  désigne le corps des nombres complexes. Le module d'un nombre complexe  $z$  est noté  $|z|$ .

$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$  (resp.  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ ) désigne l'espace des matrices à  $n$  lignes et  $m$  colonnes, à coefficients dans  $\mathbb{C}$  (resp. dans  $\mathbb{R}$ ). La matrice transposée d'une matrice  $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$  est notée  ${}^tM$ .

$\mathbb{C}^n$  est identifié à l'espace  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  des matrices colonnes à  $n$  lignes et à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . Les coefficients d'un vecteur  $x \in \mathbb{C}^n$  sont notés  $x_1, \dots, x_n$ . Dans tout le problème,  $\mathbb{C}^n$  est muni de la norme  $\|\cdot\|_1$  définie par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Pour tous  $x \in \mathbb{C}^n$  et  $y \in \mathbb{C}^n$ , la matrice  ${}^txy \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  est identifiée au nombre complexe  $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ .

Le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}^n$  engendré par un vecteur  $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  est noté  $\mathbb{C}v$ .

Une matrice  $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  est dite positive (resp. strictement positive) lorsque tous ses coefficients sont des réels positifs (resp. strictement positifs). Cette propriété est notée  $M \geq 0$  (resp.  $M > 0$ ).

Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ , on notera  $A \geq B$  (resp.  $A > B$ ) la propriété  $A - B \geq 0$  (resp.  $A - B > 0$ ). Ainsi, pour  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,

$$x \leq y \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i \geq y_i.$$

Lorsque  $m = n$ , on utilisera la notation  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  (resp.  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ) pour  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$  (resp.  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ ).

La matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

sera notée  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . On note  $I_n = \text{diag}(1, \dots, 1)$  la matrice identité d'ordre  $n$ .

Pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on pose

$$\|M\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_1=1} \|Mx\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1}. \quad (1)$$

Une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  sera en général identifiée à l'endomorphisme  $\varphi_M$  de  $\mathbb{C}^n$  représenté par  $M$  dans la base canonique de  $\mathbb{C}^n$  : pour  $x \in \mathbb{C}^n$ ,  $\varphi_M(x) = Mx$ . On appelle spectre d'une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , et on note  $\text{Sp}(M)$ , l'ensemble des valeurs propres de  $M$ . Le rayon spectral de  $M$ , noté  $\rho(M)$ , est défini comme le maximum des modules des valeurs propres de  $M$  :

$$\rho(M) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \text{Sp}(M)\}.$$

## Première partie

1. (a) Pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et tout nombre réel  $C > 0$ , montrer l'équivalence

$$\|M\| \leq C \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}^n : \|Mx\|_1 \leq C\|x\|_1.$$

(b) Montrer que l'application  $M \mapsto \|M\|$  est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

2. Montrer que pour  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .  
 3. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note  $a_{i,j}$  le coefficient de  $A$  d'indice de ligne  $i$  et d'indice de colonne  $j$ . Montrer que

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right).$$

4. On dit qu'une suite  $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  de matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  converge vers une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  lorsque

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{i,j})^{(k)} = b_{i,j}.$$

Montrer que la suite  $(A^{(k)})$  converge vers  $B$  si et seulement si  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^{(k)} - B\| = 0$ .

5. On considère dans cette question une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  triangulaire supérieure,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On suppose que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| < 1.$$

Pour tout réel  $b > 0$ , on pose  $P_b = \text{diag}(1, b, b^2, \dots, b^{n-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- (a) Calculer  $P_b^{-1}AP_b$ . Que se passe-t-il lorsqu'on fait tendre  $b$  vers 0?  
 (b) Montrer qu'il existe  $b > 0$  tel que

$$\|P_b^{-1}AP_b\| < 1.$$

- (c) En déduire que la suite  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0.

## Deuxième partie

6. Déterminer le rayon spectral des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Dire, en justifiant brièvement la réponse, si les assertions suivantes sont exactes quels que soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $\mu \in \mathbb{C}$ .
- $\rho(\mu A) = |\mu| \rho(A)$
  - $\rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B)$ .
  - $\rho(AB) \leq \rho(A) \rho(B)$ .
  - Pour  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  inversible,  $\rho(P^{-1}AP) = \rho(A)$ .
  - $\rho({}^t A) = \rho(A)$ .

8. Montrer que pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

Dans les questions 9 à 11, on considère une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On pourra admettre le fait suivant s'il n'a pas été vu encore en cours : toute matrice carrée complexe  $M$  est semblable à une matrice triangulaire c'est-à-dire que  $M$  s'écrit  $M = P^{-1}TP$  avec  $P$  inversible et  $T$  triangulaire.

9. Montrer que si  $\rho(A) < 1$ , alors la suite  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0.

10. (a) Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|A^k\| \geq \rho(A)^k$ .

(b) On définit la partie de  $\mathbb{R}_+$

$$E_A = \{\alpha > 0 \mid \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{A}{\alpha}\right)^k = 0\}.$$

Montrer que  $E_A = ]\rho(A), +\infty[$ .

11. Montrer la formule

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A).$$

12. Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de coefficients  $a_{i,j}$ , on pose  $A_+ = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ , où  $b_{i,j} = |a_{i,j}|$ . Montrer l'inégalité

$$\rho(A) \leq \rho(A_+).$$

## Troisième partie

Dans toute cette partie,  $A$  est une matrice **strictement positive** de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On se propose de démontrer les propriétés suivantes.

(i)  $\rho(A) > 0$ ,  $\rho(A)$  est une valeur propre de  $A$  et toute autre valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$  de  $A$  vérifie  $|\lambda| < \rho(A)$ .

(ii)  $\rho(A)$  est une racine simple du polynôme caractéristique de  $A$  et  $\ker(A - \rho(A)I_n)$  est engendré par un vecteur  $v_0$  dont toutes les composantes sont strictement positives.

(iii) Si  $v$  est un vecteur propre de  $A$  dont toutes les composantes sont positives, alors  $v \in \ker(A - \rho(A)I_n)$ .

(iv) Pour tout vecteur positif non nul  $x$ , il existe  $c \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A^k x}{\rho(A)^k} = cv_0$ .

13. Soient  $z_1, \dots, z_n$  des nombres complexes. Montrer que si

$$|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|,$$

alors le vecteur  $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$  est colinéaire au vecteur  $\begin{pmatrix} |z_1| \\ \vdots \\ |z_n| \end{pmatrix}$ .

14. Soient  $x, y \in \mathbb{C}^n$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Montrer que si  $\lambda \neq \mu$ , alors on a l'implication suivante

$$(Ax = \lambda x \text{ et } {}^t Ay = \mu y) \Rightarrow {}^t xy = 0.$$

15. On suppose qu'il existe un réel positif  $\mu$  et un vecteur positif non nul  $w$  tels que  $Aw \geq \mu w$ .

(a) Montrer que pour tout entier naturel  $k$ ,  $A^k w \geq \mu^k w$ . En déduire que  $\rho(A) \geq \mu$ .

(b) Montrer que si  $Aw > \mu w$ , alors  $\rho(A) > \mu$ .

(c) On suppose à présent que dans le système d'inégalités  $Aw \geq \mu w$ , la  $k$ -ième inégalité est stricte, c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^n a_{k,j} w_j > \mu w_k.$$

Montrer qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que, en posant  $w'_j = w_j$  si  $j \neq k$  et  $w'_k = w_k + \varepsilon$ , on a  $Aw' > \mu w'$ . En déduire que  $\rho(A) > \mu$ .

16. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  de module  $\rho(A)$  et soit  $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$ . On définit le vecteur positif non nul  $v_0$  par  $(v_0)_i = |x_i|$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

(a) Montrer que  $Av_0 \geq \rho(A)v_0$ , puis que

$$Av_0 = \rho(A)v_0.$$

(b) En déduire que  $\rho(A) > 0$  et

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (v_0)_i > 0.$$

(c) Montrer que  $x$  est colinéaire à  $v_0$ . En déduire que  $\lambda = \rho(A)$ .

*La propriété (i) est démontrée.*

17. En appliquant les résultats précédents à la matrice  ${}^tA$ , on obtient l'existence de  $w_0 \in \mathbb{R}^n$ , dont toutes les composantes sont strictement positives, tel que  ${}^tAw_0 = \rho(A)w_0$ . On pose

$$F = \{x \in \mathbb{C}^n \mid {}^txw_0 = 0\}.$$

(a) Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}^n$  stable par  $\varphi_A$ , et que

$$\mathbb{C}^n = F \oplus \mathbb{C}v_0.$$

(b) Montrer que si  $v$  est un vecteur propre de  $A$  associé à une valeur propre  $\mu \neq \rho(A)$ , alors  $v \in F$ . En déduire la propriété (iii).

18. (a) On note  $\psi$  l'endomorphisme de  $F$  défini comme la restriction de  $\varphi_A$  à  $F$ . Montrer que toutes les valeurs propres de  $\psi$  sont de module strictement inférieur à  $\rho(A)$ . En déduire que  $\rho(A)$  est une racine simple du polynôme caractéristique de  $A$  puis que

$$\ker(A - \rho(A)I_n) = \mathbb{C}v_0.$$

*La propriété (ii) est démontrée.*

(b) Montrer que si  $x \in F$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A^k x}{\rho(A)^k} = 0$ .

(c) Soit  $x$  un vecteur positif non-nul. Déterminer la limite de  $\frac{A^k x}{\rho(A)^k}$  lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ .

*La propriété (iv) est démontrée.*