PSI* 2023/24 DS 2

Racine carrée d'endomorphisme
Problème aux limites, discrétisation

Exercice - racine carrée d'endomorphisme

Adaptation d'un sujet Mines PC2001, qui proposait plusieurs méthodes et divers résultats au passage.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels. Etant donné un entier naturel n, on note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. On note respectivement D et D_n les endomorphismes définis sur E et E_n en associant à un polynôme sa dérivée : pour $P \in E$, $D(P) = P'$ et, pour $Q \in E_n$, $D_n(Q) = Q'$.

L'objectif de l'exercice est de rechercher les réels λ pour lesquels l'endomorphisme $\lambda \operatorname{Id}_E + D$ peut se mettre sous la forme d'une composée d'un endomorphisme de E avec lui-même : $g^2 = g \circ g$ pour $g \in L(E)$.

Q1. Soit u un endomorphisme de E qui commute avec D : $u \circ D = D \circ u$. Montrer que E_0 est stable par u, puis que pour tout entier naturel n, E_n est stable par u.

Q2. On suppose que $g \in L(E)$ vérifie $g \circ g = \lambda \operatorname{Id}_E + D$. Montrer que l'espace vectoriel E_n est stable par g et que l'endomorphisme induit sur E_n, $g_n : P \mapsto g_n(P) = g(P)$, vérifie $g_n \circ g_n = \lambda \operatorname{Id}_{E_n} + D_n$.

Q3. En déduire que si $\lambda < 0$, on ne peut pas trouver de $g \in L(E)$ vérifiant $g \circ g = \lambda \operatorname{Id}_E + D$.

Q4. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel F de dimension finie d. On suppose que u est nilpotent c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$.

a. Montrer que la suite des noyaux successifs est croissante pour l'inclusion

$$\ker u \subset \ker u^2 \subset \cdots \subset \ker u^{k-1} \subset \ker u^k = F$$

b. On suppose qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\ker u^q = \ker u^{q+1}$. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\ker u^q = \ker u^{q+j}$.

c. En déduire que l'indice de nilpotence de u, défini par $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N}, u^k = 0\}$, vérifie $k_0 \leq d$.

Q5. Déduire de Q4 que l'on ne peut pas trouver de $g \in L(E)$ vérifiant $g \circ g = D$. Montrer que pour $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, on ne peut pas non plus trouver $g \in L(E)$ solution d'une relation de la forme $g^p = D$.

Q6. On définit une fonction h sur $]-1, +\infty[$ par la relation $h(x) = \sqrt{1+x}$.

a. Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre dont une solution est cette fonction h.

b. En déduire qu'il existe un intervalle ouvert $]-R, R[$ sur lequel $h(x)$ est somme d'une série entière $\sum_{p=0}^{+\infty} b_p x^p$ dont on précisera les coefficients b_p (donner une expression avec des factorielles) et le rayon de convergence R.

c. Déterminer les réels c_n définis par la relation

$$c_n = \sum_{p=0}^{n} b_p b_{n-p}$$

Q7. Soit $\lambda > 0$; soit n un entier naturel donné. On pose

$$g_n(P) = \sqrt{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{\lambda^k} D_n^k(P)$$

Expliquer pourquoi cette définition a un sens et définit bien un endomorphisme de E tel que $g_n \circ g_n = \lambda \operatorname{Id}_{E_n} + D_n$.

Q8. Soit $\lambda > 0$. Montrer qu'on peut trouver $g \in L(E)$ tel que $g \circ g = \lambda \operatorname{Id}_E + D$.

Problème - Discrétisation d'un problème aux limites

Sujet chimérique issu d'un croisement de Mines PC 2002, Maths II / X PSI 2018, avec un zeste de X PSI 2000.

Dans tout le problème, I est le segment $[0,1]$, f est une fonction réelle définie et continue sur le segment I, p est une fonction définie et continue sur le segment I, positive (pour tout réel x de I, $p(x)\geq 0$).

L'objet du problème est l'étude et l'approximation des solutions réelles, définies sur le segment I, deux fois continûment dérivables (de classe C^2) des équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{E_0} & -u''(x)+p(x)u(x)=0 \\ \mathbf{E} & -u''(x)+p(x)u(x)=f(x) \end{array}$$

vérifiant, en outre, les conditions suivantes aux extrémités du segment I :

$$\mathbf{C} \qquad u(0)=0, u(1)=0$$

Le problème $\mathbf{P_0}$ consiste à chercher les fonctions u solutions de $\mathbf{E_0}$ et vérifiant les conditions $\mathbf{C}$.
Le problème $\mathbf{P}$ consiste à chercher les fonctions u solutions de $\mathbf{E}$ et vérifiant les conditions $\mathbf{C}$.

Première partie - Résultats généraux.

1. **Discussion sur les conditions :**
   (a) Soient a, b, c trois nombres réels donnés. Discuter selon les valeurs de a, b, c le nombre de solutions de l'équation $\mathbf{E}$ vérifiant en outre les conditions
   $$u(0)=a, u'(0)=b, u''(0)=c$$
   (b) Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il au problème $\mathbf{P}$ (formé de l'équation $\mathbf{E}$ et des conditions $\mathbf{C}$) ?
   (c) Déterminer toutes les solutions du problème $\mathbf{P}$ lorsque la fonction p est nulle et la fonction f constante et égale à 1 :
   $$p(x)=0,\ f(x)=1.$$
2. **Unicité des solutions :**
   (a) Soit u une fonction solution de l'équation $\mathbf{E_0}$ vérifiant les conditions $\mathbf{C}$; démontrer que cette solution u vérifie la relation :
   $$\int_0^1 \left[u'(x)^2+p(x)u(x)^2\right] \mathrm{d}x=0.$$
   En déduire que la seule solution du problème $\mathbf{P_0}$ est la solution nulle.
   (b) Démontrer que, pour des fonctions p et f données, il existe, au plus, une solution du problème $\mathbf{P}$.
3. **Existence d'une solution :**
   (a) Étant données deux fonctions u_1 et u_2 solutions de l'équation différentielle $\mathbf{E_0}$, soit g la fonction définie sur l'intervalle I par la relation suivante :
   $$g(x)=u_1(0)u_2(x)-u_2(0)u_1(x).$$
   Démontrer que, si la fonction g s'annule au point 1 ($g(1)=0$), la fonction g est nulle sur l'intervalle I.
   En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les deux solutions u_1 et u_2 pour que la fonction g ne s'annule pas en 1 ($g(1)\neq 0$).
   Soient u_1 et u_2 deux solutions de l'équation différentielle $\mathbf{E_0}$, v une solution de l'équation $\mathbf{E}$ et λ et μ deux scalaires. Soit u et X la fonction et le vecteur définis par les relations suivantes :
   $$u(x)=\lambda u_1(x)+\mu u_2(x)+v(x), \qquad X=\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}.$$
   (b) Démontrer que, pour que la fonction u soit solution du problème $\mathbf{P}$, il faut et il suffit que le vecteur X vérifie la relation matricielle suivante :
   $$U.X=B,$$
   où U est une matrice carrée d'ordre 2 et B un vecteur qui seront précisés.
   (c) Démontrer que le problème $\mathbf{P}$ admet une solution unique.

Deuxième partie - Une matrice de discrétisation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère A_n la matrice carrée de taille n suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Justifier que les valeurs propres de A_n sont nécessairement réelles. Soit $V = (v_1, \dots, v_n)^\top$ un vecteur propre de A_n associé à une valeur propre λ. Montrer que les composantes v_i de V vérifient la relation :

$$v_{i+1} - (2-\lambda)v_i + v_{i-1} = 0, \ 1 \leq i \leq n$$

   où l'on a posé la convention $v_0 = v_{n+1} = 0$.
5. Montrer que toute valeur propre de A_n est dans l'intervalle $]0, 4[$. *On pourra, dans la relation précédente, introduire un indice i tel que $|v_i|$ est maximal.*
6. Soit λ une valeur propre de A_n.
   (a) Montrer que les racines complexes r_1, r_2 du polynôme

$$P(r) = r^2 - (2-\lambda)r + 1$$

   sont distinctes et conjuguées.
   (b) On pose $r_1 = \overline{r_2} = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
   Montrer qu'on a nécessairement $\sin((n+1)\theta) = 0$ et $\rho = 1$.
7. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de A_n ainsi qu'une base de vecteurs propres.
8. On considère la famille de matrices $B = [b_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les trois propriétés suivantes (appelées M-matrices) :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \begin{cases} b_{i,i} > 0 \\ b_{i,j} \leq 0 \ \text{ pour tout } \ j \neq i \\ \sum\limits_{j=1}^{n} b_{i,j} > 0 \end{cases}$$

   Montrer que si B est une M-matrice, alors on a
   (a) B est inversible
   (b) Si $F = (f_1, \dots, f_n)^\top$ a des coordonnées toutes positives, alors $B^{-1}F$ aussi,
   (c) tous les coefficients de B^{-1} sont positifs.

   • **Dans toute la suite, on aura besoin d'une définition étendue. On parlera encore de M-matrice si on remplace la 3ème condition par "on a $\sum\limits_{j=1}^{n} b_{i,j} \geq 0$ pour tout i, et > 0 pour un certain i_0". On admettra que le résultat de la question 8 s'applique encore à ces M-matrices étendues**[1]
9. Justifier que A_n est inversible et que tous les coefficients de A_n^{-1} sont positifs.

Troisième partie - Une suite d'approximations de la solution de P

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note $h = \frac{1}{n+1}$ et on considère les réels $(x_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ définis par $x_i = ih$ pour tout $i \in \{0, \dots, n+1\}$.

10. Montrer que pour toute fonction $v \in \mathcal{C}^4([0,1], \mathbb{R})$, il existe une constante $C \geq 0$, indépendante de n, telle que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \left| v''(x_i) - \frac{1}{h^2}(v(x_{i+1}) + v(x_{i-1}) - 2v(x_i)) \right| \leq Ch^2$$

1. Sur ce point l'énoncé d'origine était confus et très mal conçu.

11. Montrer qu'il existe une unique famille de réels $(u_i)_{0\leq i\leq n+1}$ vérifiant

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{h^2}(u_{i+1}+u_{i-1}-2u_i)+p(x_i)u_i=f(x_i), \quad \text{pour} \quad 1\leq i\leq n \\ u_0=u_{n+1}=0 \end{cases} \tag{2}$$

12. On suppose (dans cette question seulement) que $p(x)=0$ et $f(x)=1$ pour tout $x\in[0,1]$. On note u la solution exacte du problème **P**. Montrer que pour tout $i\in\{0,\dots,n+1\}$, on a

$$u_i=u(x_i)=\frac{1}{2}x_i(1-x_i)$$

13. Montrer que si f est positive, alors $u_i\geq 0$ pour tout $i\in\{0,\dots,n+1\}$.

Quatrième partie - un résultat de convergence

Dans toute cette partie, on supposera de plus que $p\in\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ et que $f\in\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ (p est toujours positive également). On utilise la notation usuelle suivante pour un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ de composantes $(x_1,\dots,x_n)$:

$$\|x\|_\infty=\max(|x_1|,\dots,|x_n|)$$

14. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On définit l'application N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par la relation :

$$N(A)=\sup\{\|Ax\|_\infty,\ \|x\|_\infty\leq 1\}$$

Montrer que si $A=[a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$, alors cette quantité $N(A)$ existe et vaut

$$N(A)=\max_{i\in\{1,\dots,n\}}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|$$

15. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
16. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
    (a) En utilisant les résultats des questions 8c,12 et 14, montrer que pour la matrice A_n définie au début de la partie 2, on a :
    $$N(((n+1)^2A_n)^{-1})\leq\frac{1}{8}$$
    (b) En déduire que pour toute matrice diagonale $D_n=[d_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ telle que $d_{i,i}\geq 0$ pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, on a également
    $$N(((n+1)^2A_n+D_n)^{-1})\leq\frac{1}{8}$$
17. Soit u l'unique solution du problème **P** et $(u_i)_{0\leq i\leq n+1}$ la famille définie par la relation (2) pour $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une constante $\tilde{C}>0$, indépendante de n, telle que

$$\max_{0\leq i\leq n+1}|u(x_i)-u_i|\leq\frac{\tilde{C}}{n^2}$$

Indication : on pourra introduire le vecteur $X={}^t(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ où on a posé $\varepsilon_i=u(x_i)-u_i$ et calculer A_nX.