PSI* 2023/24 DS 3

Fonction de Wallis

Sujet Mines MP 2023 - sujet de 4h amputé d'une partie, modifié à la marge. La dernière partie est sans doute "en trop".

Dans tout le sujet, l'intervalle $]-1,+\infty[$ de $\mathbf{R}$ est appelé I et f est la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x \ \mathrm{d}t$$

On se propose, dans cette épreuve, d'étudier f (domaine de définition, régularité, variations, convexité, développement éventuel en série entière, ...) puis, dans la dernière partie, de montrer qu'elle est la seule fonction numérique à vérifier certaines propriétés.

I Équivalents

Q1 ▷ Déterminer le domaine de définition de f

Q2 ▷ Vérifier que

$$\forall x \in I,\ (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2) \qquad (1)$$

Q3 ▷ Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, décroissante et convexe sur I.

Q4 ▷ Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers -1.

Q5 ▷ Montrer que pour tout entier naturel n,

$$f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

puis que :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

Q6 ▷ Représenter graphiquement f en exploitant au mieux les résultats précédents.

II Développement en série entière

Si $n \in \mathbf{N}$, on note D_n l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^n \ \mathrm{d}t$.

Q7 ▷ Justifier que, si $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale généralisée D_n est convergente.

Q8 ▷ Montrer que

$$D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t$$

et en déduire la valeur de D_1.

Q9 ▷ Calculer les valeurs de $f'(0)$ et $f'(1)$.

Q10 ▷ Vérifier que si $n \in \mathbf{N}^*$, alors

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}\,\mathrm{d}u$$

puis prouver successivement les relations

$$D_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n \int_0^{+\infty} u^n \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u, \qquad D_n \sim (-1)^n n!$$

Q11 ▷ Démontrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et expliciter un tel développement.

III Convexité logarithmique

Une application h d'un intervalle non trivial J de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est dite ln-convexe si, et seulement si, elle est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et la fonction $\ln \circ h$ est convexe sur J.

Q12 ▷ Vérifier que $F = \ln \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et que f est une application de I dans $\mathbf{R}$ ln-convexe.

On souhaite désormais déterminer toutes les applications de I dans $\mathbf{R}$ qui sont ln-convexes et qui vérifient la propriété (1), voir question 2.

On considère donc une fonction g, ln-convexe et vérifiant elle aussi la relation (1). On appelle $\widetilde{g}$ l'application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}^+, \widetilde{g}(x) = \ln(g(2x))$$

Q13 ▷ Montrer que

$$\forall p \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in \mathbf{R}_+,\ \widetilde{g}(x+p) = \widetilde{g}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right)$$

Q14 ▷ On suppose ici que $x \in \mathbf{R}_+^*, (n,p) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et $x \leqslant p$. Vérifier que

$$\widetilde{g}(n) - \widetilde{g}(n-1) \leqslant \frac{\widetilde{g}(n+x) - \widetilde{g}(n)}{x} \leqslant \frac{\widetilde{g}(n+p) - \widetilde{g}(n)}{p}$$

et que $(\widetilde{g}(n+x) - \widetilde{g}(n))$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Q15 ▷ En conclure que f est la seule application de I dans $\mathbf{R}$, qui soit ln-convexe, qui vérifie (1) et telle que

$$f(0) = \frac{\pi}{2}$$

Q16 ▷ Plus généralement, déterminer, si $T \in \mathbf{R}_+^*$, toutes les applications g de $]-T,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$, ln-convexes et vérifiant

$$\forall t \in]-T,+\infty[,\ (t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T)$$

Q17 ▷ Si $T \in \mathbf{R}_+^*$, existe-t-il une application h, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et ln-convexe, vérifiant

$$\forall t \in \mathbf{R},\ (t+T)h(t) = (t+2T)h(t+2T)\,?$$

IV Convergence de suite de fonctions

On se propose dans cette partie de calculer $f''(0)$. Dans ce but, on considère deux nombres réels strictement positifs a et b, et on pose pour simplifier les écritures

$$\rho = \frac{b-a}{b+a}$$

On appelle Ψ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \Psi(x) = \ln\left(a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x\right)$$

On admettra le fait suivant, qui résulte d'un simple calcul : Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, avec pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi'(x) = \frac{4\rho\sin(2x)}{1 - 2\rho\cos(2x) + \rho^2}$$

Q18 ▷ Montrer que $\rho < 1$ et que la dérivée de Ψ s'exprime également, pour tout $x \in \mathbf{R}$, comme

$$\Psi'(x) = 4\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx)$$

Q19 ▷ En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi(x) = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k}\rho^k$$

Q20 ▷ Montrer que la fonction suivante est définie et continue sur $[-1, 1]$

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

On pourra par la suite admettre la valeur classique $\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}$.

On admet qu'en développant les expressions trigonométriques et par un argument analogue à Q19 on obtient

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2 \,\mathrm{d}x = 4\pi\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 + 2\pi\sigma\left(\rho^2\right)$$

On définit les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ a_n = \frac{1}{n+1} \text{ et } b_n = \frac{n}{n+1}$$

Q21 ▷ Établir la convergence simple de la suite d'applications $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, de $]0, \pi[$ dans $\mathbf{R}$, définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall t \in\ ]0,\pi[\,,\ \Psi_n(t) = \ln\left(a_n^2\cos^2 t + b_n^2\sin^2 t\right)$$

En déduire $f''(0)$.

Ψ
