PSI* 2023/24 DL 10

Etude d'une série trigonométrique

On pose, pour tout réel x et tout $\alpha \in]0, +\infty[$,

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}. \tag{1.1}$$

L'objectif de ce problème est d'étudier différentes propriétés de cette fonction.

Préliminaires

On note, pour tout réel $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\Gamma(x)$ est bien défini. On utilisera cette fonction dans différentes relations ci-dessous.
2. Pour chaque réel $\alpha > 1$, prouver que la fonction S_α est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Pour chaque réel $\alpha > 3$, prouver que la fonction S_α est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée seconde.

Sujet que j'ai déjà donné en DS donc un peu long (j'avais même prévu une partie IV au cas où :). La partie I est indépendante des parties II et III ; la partie III n'utilise que la formule finale de la partie II qui pourra être admise pour traiter III. Travail minimum demandé (pour le 2 février) : préliminaire + partie I.

I Définition et continuité de S_α

On souhaite prouver que S_α peut être définie pour tout paramètre $\alpha > 0$ et étudier sa continuité. On fixe donc $\alpha > 0$.

Soient p et q deux entiers naturels non nuls vérifiant : $p \leq q$.

4. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels. On pose $\Delta u_n = u_n - u_{n+1}$ et pour $n \geq p$, $\sigma_n = \sum\limits_{k=p}^{n} v_k$.

   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=p}^{q} u_n v_n = \sum_{n=p}^{q-1} (\Delta u_n)\sigma_n + \sigma_q u_q$.

   Dans les questions (b) et (c), on suppose en outre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite nulle et que $\forall N \geq p,\ |\sigma_N| \leq M$.

   (b) Montrer que $\sum u_n v_n$ converge.

   (c) Prouver que $\left|\displaystyle\sum_{n=p}^{q} u_n v_n\right| \leq M u_p$.

5. (a) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$.

   (b) Déterminer λ, μ, a, b en fonction de p et n tels que $n \geq p$ et

$$\sum_{k=p}^{n} e^{ikx} = e^{i\lambda x}\frac{\sin(\mu x)}{\sin\frac{x}{2}} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=p}^{n}\sin(kx) = \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{\sin\frac{x}{2}}$$

   (c) On suppose que $x \in]0, \pi]$. Montrer que $\left|\sum\limits_{k=p}^{n}\sin(kx)\right| \leq \frac{K}{x}$ où K est une constante à déterminer.

6. (a) Pour $q \geq p$, en utilisant les inégalités précédentes majorer $\left|\sum\limits_{n=p}^{q}\frac{\sin(nx)}{n^\alpha}\right|$ en fonction de α, p et x.

   (b) Montrer que la fonction S_α est définie sur $]0, \pi]$ puis sur $\mathbb{R}$.

   (c) Montrer que S_α est continue sur $]0, \pi]$, puis sur $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

II Deux représentations de S_α

Dans toute cette partie, u désigne un complexe vérifiant $|u| \leq 1$ et $u \neq 1$.

7. Étudier, en fonction du paramètre $\gamma \in \mathbb{R}$, l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$, de la fonction

$$J : t \mapsto \frac{t^{\gamma-1}}{e^t - u}$$

Soit $t > 0$. On pose,

$$R_N(t, u) = \left(\frac{u}{e^t - u} - ue^{-t}\sum_{n=0}^{N-1}(ue^{-t})^n\right) t^{\alpha-1}.$$

8. Simplifier l'expression de R_N, en l'écrivant sous forme d'une fraction.
9. Prouver que pour tout $\alpha > 0$,

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} R_N(t, u)\mathrm{d}t = 0.$$

10. Exprimer, en fonction de $\Gamma(\alpha)$, la constante $K(\alpha) \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $\alpha > 0$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{u\,t^{\alpha-1}}{e^t - u}\,\mathrm{d}t = K(\alpha)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u^n}{n^\alpha}. \tag{1.2}$$

Dans toutes les questions suivantes, α est un réel strictement positif fixé. On va également travailler pour u réel, $u \in]-1, 1[$.

11. En déduire pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $S_\alpha(x)$ est bien défini et qu'on a l'identité suivante :

$$S_\alpha(x) = \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - \cos x}\,\mathrm{d}\,t.$$

On a retrouvé que $S_\alpha(x)$ existe et on pourrait, avec les théorèmes de continuité et dérivation sous intégrale que nous avons vu, déduire de cette formule que S_α est une fonction continue (comme cela a été prouvé en partie I) et même $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

12. Montrer, pour tout $M > 0$, pour tout $u \in]-1, 1[$, l'égalité suivante :

$$\int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - u}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^M u^n\frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,t$$

13. Établir, pour tout $u \in]-1,1[$, l'identité

$$\lim_{M\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^M u^n \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} \,\mathrm{d}t$$

14. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, exprimer $S_\alpha(x)$ en fonction de fonctions trigonométriques et de G_α où

$$G_\alpha(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n \text{ pour } u \in]-1,1[$$

avec

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} \,\mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

III Comportement asymptotique

Soit $B :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, intégrable sur $]0,+\infty[$, et telle que

$$\exists a > 0, \exists \lambda \in]0,+\infty[, \qquad B(s) = a s^{\lambda-1}(1+\mathrm{o}(1)) \text{ lorsque } s \to 0^+. \tag{1.4}$$

15. Prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\left| \int_0^\delta (B(s)\mathrm{e}^{-ns} - a s^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-ns}) \,\mathrm{d}s \right| < \varepsilon \frac{a}{n^\lambda} \Gamma(\lambda).$$

16. Prouver que pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $C(\delta) > 0$ (que vous exprimerez sous la forme d'une intégrale indépendante de n) telle que pour tout $n > 1$

$$\left| \int_\delta^{+\infty} (B(s)\mathrm{e}^{-ns} - a s^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-ns}) \,\mathrm{d}s \right| \leqslant C(\delta)\mathrm{e}^{-(n-1)\delta}.$$

17. Prouver que, sous ces hypothèses,

$$\int_0^{+\infty} B(s)\mathrm{e}^{-ns} \,\mathrm{d}s = a \frac{\Gamma(\lambda)}{n^\lambda} (1+\mathrm{o}(1)), \text{quand } n \to +\infty.$$

18. Montrer que pour tout entier naturel n, on peut écrire

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{\left(\ln(\mathrm{e}^s + \sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1})\right)^{\alpha-1}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1}} \mathrm{e}^{-ns} \,\mathrm{d}s,$$

où a_n est défini dans (1.3).

On pose dorénavant, pour tout $s > 0$,

$$B(s) = \frac{\left(\ln(\mathrm{e}^s + \sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1})\right)^{\alpha-1}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1}}$$

19. Donner un équivalent de la fonction B au voisinage de 0^+.
20. Déterminer la limite de $a_n n^{\alpha/2}$ quand n tend vers l'infini.