PSI* 2023/24 DS 5

Nombre de sites visités par une marche aléatoire

Version revampée de Mines MP 2020

Dans tout le texte, d est un élément de $\mathbb{N}^*$. On note 0_d le d-uplet dont toutes les coordonnées valent 0, c'est à dire le vecteur nul de $\mathbb{R}^d$.

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune la loi de X et définies sur un même espace probabilisé. La suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $S_0 = 0_d$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *marche aléatoire de pas X*, à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$.

On note R la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ définie par

$$R = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 0_d\} & \text{si } \ \{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 0_d\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit, R est égal

- à $+\infty$ si la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne revient jamais en 0_d,
- au premier instant auquel cette marche aléatoire revient en 0_d sinon.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit N_n le cardinal du sous-ensemble

$$\{S_k,\ k \in \{0, \ldots, n\}\}$$

de $\mathbb{Z}^d$. Le nombre N_n est donc le nombre de points de $\mathbb{Z}^d$ visités par la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ après n pas.

Le but du problème est d'étudier asymptotiquement l'espérance $\mathbb{E}[N_n]$ de la variable aléatoire N_n.

A. Marches aléatoires générales, récurrence

On considère les fonctions F et G définies par les formules

$$\forall x \in]-1,1[,\ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0_d)x^n$$

$$\forall x \in]-1,1[,\ G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(R = n)x^n$$

1. Justifier que les fonctions F et G sont définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\,]-1,1[\,$.

2. Montrer que G est définie et continue sur $[-1,1]$ et que
$$G(1) = \mathbb{P}(R \neq +\infty)$$

3. Si k et n sont des entiers naturels tels que $k \leq n$, montrer que les variables $S_n - S_k$ et S_{n-k} ont même loi.
4. Si k et n sont des entiers naturels tels que $k \leq n$, montrer que
$$\mathbb{P}((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = \mathbb{P}(R = k)\mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d)$$
En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(S_n = 0_d) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(R = k)\mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d)$$

5. a. Montrer que
$$\forall x \in\,]-1,1[\,,\ F(x) = 1 + F(x)G(x)$$
b. Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque $x \to 1^-$, en discutant selon la valeur de $\mathbb{P}(R \neq +\infty)$.

6. Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que la série entière $\sum c_k x^k$ ait un rayon de convergence 1. Pour $|x| < 1$, on note $H(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$

    a. Montrer que H admet une limite L finie ou $+\infty$ en 1^-.

    b. Si la série $\sum c_k$ converge, montrer que $L = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k$.

    c. Si la série $\sum c_k$ diverge, montrer que $L = +\infty$.

7. Montrer que la série $\sum \mathbb{P}(S_n = 0_d)$ est divergente si et seulement si $\mathbb{P}(R \neq +\infty) = 1$.

B. Les marches de Bernoulli sur $\mathbb{Z}$

Dans cette question, d est égal à 1 et on note donc simplement $0_d = 0$.
Par ailleurs, $p \in]0,1[\,$, $q = 1 - p$ et la loi de X est donnée par
$$\mathbb{P}(X = 1) = p \ \text{ et } \ \mathbb{P}(X = -1) = q$$

8. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, rappeler sans donner de démonstration, le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ sur $\,]-1,1[\,$.

    a. Justifier la formule :
$$\forall x \in\,]-1,1[\,,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n$$

    b. En déduire le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$ sur $]-1,1[$.
9. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0)$ et justifier l'égalité
$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n}(pq)^n$$

10. Pour $x \in\,]-1,1[\,$, donner une expression simple de $G(x)$.

11. Exprimer $\mathbb{P}(R = +\infty)$ en fonction de $|p - q|$; déterminer ensuite la loi de R.
12. On suppose que
$$p = q = \frac{1}{2}$$
Donner un équivalent simple de $\mathbb{P}(R = 2n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

C. Intermède : comparaisons pour des sommes

On établit des résultats asymptotiques utiles pour les parties suivantes.

13. Montrer, par exemple en utilisant une comparaison série-intégrale, que

    a. Si $\alpha \in [0,1[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

    b. Et si $\alpha > 1$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

14. Soient $\alpha > 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels tels que $u_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$. Montrer que l'on a encore

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels telles que b_n est à termes positifs et $\sum b_n$ est une série divergente. On note $A_N = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n$ et $B_N = \sum\limits_{n=0}^{N} b_n$ les sommes partielles correspondantes.

15. Montrer que si $a_n = o(b_n)$ alors $A_N = o(B_N)$.
16. En déduire que si $a_n \sim b_n$ alors $A_N \sim B_N$.
17. Déduire de ces résultats le théorème de Cesàro : si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels converge vers une limite ℓ, alors la suite de terme général

$$M_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} u_n$$

converge elle aussi vers ℓ.

D. Nombre d'emplacements visités

On reprend le cas général (marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$).

18. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, soit Y_i la variable de Bernoulli indicatrice de l'événement

$$(S_i \notin \{S_k,\ 0 \leq k \leq i-1\})$$

Montrer que, pour $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(Y_i = 0) = \mathbb{P}(R \leq i)$$

En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}\left[N_n\right] = 1 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(R > i)$$

19. Conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[N_n\right]}{n} = \mathbb{P}(R = +\infty)$$

20. On se replace dans le cas de la marche de Bernoulli le cas de la partie B, avec $d = 1$ et aussi $p = q = \frac{1}{2}$. Donner un équivalent simple de $\mathbb{E}\left[N_n\right]$ lorsque n tend vers $+\infty$.

E. Un résultat asymptotique

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 1$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

21. Soient m et n deux entiers naturels tels que $m > n$. Montrer que

$$a_n \leq \frac{1}{B_n} \quad \text{et} \quad 1 \leq a_n B_{m-n} + a_0(B_m - B_{m-n})$$

22. On suppose dans cette question qu'il existe $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $m_n > n$ pour n assez grand et

$$B_{m_n - n} \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n \quad \text{et} \quad B_{m_n} - B_{m_n - n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Montrer que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{B_n}$$

23. On suppose dans cette question qu'il existe $C > 0$ tel que

$$b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n}$$

En utilisant la question précédente pour une suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bien choisie, montrer que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{C\ln(n)}$$

F. Marche sur $\mathbb{Z}^2$, théorème d'Erdös et Dvorestsky

24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_k = 0_d)\mathbb{P}(R > n-k)$$

Dans les deux dernières questions, on suppose que $d = 2$ et que la loi de X est donnée par

$$\mathbb{P}(X = (0,1)) = \mathbb{P}(X = (0,-1)) = \mathbb{P}(X = (1,0)) = \mathbb{P}(X = (-1,0)) = \frac{1}{4}$$

25. Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir l'égalité

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0_2) = \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)^2$$

Si nécessaire, pour simplifier, on pourra s'intéresser aux coefficients du polynôme $(X-1)^n(X+1)^n = (X^2-1)^n$.

26. Donner un équivalent simple de $\mathbb{E}\left[N_n\right]$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On pourra utiliser sans démonstration une conséquence de la partie C : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k} \sim \frac{n}{\ln n}$.