PSI* 2023/24 DL 11

Matrices de Hilbert

Pour vendredi 8 mars si possible

Rappels et notations

Pour tout entier naturel non nul n, on note :

— $[\![1,n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \leq k \leq n$;

— $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes (respectivement l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes) à coefficients dans $\mathbb{R}$;

— $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$; on dit que A est positive (respectivement définie positive) si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX \geq 0 \quad (\text{respectivement } {}^tXAX > 0 \text{ si } X \neq 0).$$

L'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[X]$, et, pour tout entier naturel p, le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à p est noté $\mathbb{R}_p[X]$.

Objectifs

La première partie a pour but de démontrer une caractérisation des matrices symétriques réelles définies positives, à l'aide des déterminants de certaines matrices extraites.

La deuxième partie aborde l'étude d'une suite de polynômes orthogonaux pour un produit scalaire défini à l'aide d'une intégrale.

La troisième partie introduit les matrices de Hilbert et leur inverse, dont certaines propriétés sont étudiées dans la partie IV.

I Matrices symétriques définies positives

A. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.
2. Montrer que A est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

B. Pour $n \in \mathbb{N}^*, A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $i \in [\![1,n]\!]$, on note $A^{(i)}$ la matrice carrée d'ordre i extraite de A, constituée par les i premières lignes et les i premières colonnes de A.

Le but de cette question est de démontrer l'équivalence suivante :

$$A \text{ est définie positive} \iff \forall i \in [\![1,n]\!], \det(A^{(i)}) > 0.$$

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est définie positive.
   Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, montrer que la matrice $A^{(i)}$ est définie positive et en déduire que $\det(A^{(i)}) > 0$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on dira qu'une matrice A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $\mathcal{P}_n$ si $\det(A^{(i)}) > 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.
2. Dans les cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$, montrer directement que toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_n$ est définie positive.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_n$ est définie positive. On considère une matrice A de $\mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ et on suppose par l'absurde que A n'est pas définie positive.

a. Montrer alors que A admet deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à des valeurs propres (non nécessairement distinctes) strictement négatives.

b. En déduire qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ dont la dernière composante est nulle et tel que ${}^tXAX < 0$.

c. Conclure.

C. Soit A une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. A-t-on l'équivalence suivante :

$$A \text{ est positive } \iff \forall i \in [\![1,n]\!], \det(A^{(i)}) \geq 0 \text{ ?}$$

II Étude d'une suite de polynômes

On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, P_n = [X(X-1)]^n \end{cases}$$

De plus, on pose :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \quad \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

A. Montrer que l'application $(P,Q) \longmapsto \langle P,Q\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

B. On note $P_n^{(n)}$ le polynôme dérivé n fois de P_n.
Déterminer le degré de $P_n^{(n)}$ et calculer $P_n^{(n)}(1)$.
On définit la suite de polynômes $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} L_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, L_n = \frac{1}{P_n^{(n)}(1)} P_n^{(n)} \end{cases}$$

C. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle Q, L_n\rangle = 0$.
Indication : on pourra intégrer par parties.

D.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 P_n(u)\,\mathrm{d}u$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de I_n.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation : $\langle L_n, L_n\rangle = \dfrac{1}{2n+1}$.

E. Déterminer une famille de polynômes $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

i. pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de K_n vaut n et son coefficient dominant est strictement positif ;

ii. pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(K_n)_{0\leq n\leq N}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_N[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot\rangle$.
Justifier l'unicité d'une telle famille.

F. Calculer K_0, K_1 et K_2.

III Matrices de Hilbert

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la matrice H_n par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (H_n)_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$$

où $(H_n)_{i,j}$ désigne le coefficient de place (i,j) de la matrice H_n. On note de plus $\Delta_n = \det(H_n)$.

A. ***Étude de quelques propriétés de*** H_n
Dans les questions de III.A, on désigne par n un entier naturel non nul.

1. Montrer la relation :

$$\Delta_{n+1} = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}\Delta_n.$$

Indication : on pourra commencer par soustraire la dernière colonne de Δ_{n+1} à toutes les autres.

2. En déduire l'expression de Δ_n en fonction de n (on fera intervenir les quantités $c_m = \prod_{i=1}^{m-1} i!$ pour des entiers m adéquats).
3. Prouver que H_n est inversible, puis que $\det(H_n^{-1})$ est un entier.
4. Démontrer que H_n admet n valeurs propres réelles (comptées avec leur ordre de multiplicité) strictement positives.

B. ***Approximation au sens des moindres carrés***

On note $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On convient d'identifier l'espace $\mathbb{R}[X]$ au sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ constitué des fonctions polynomiales de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$; ainsi, pour tout entier naturel i, le polynôme X^i est confondu avec la fonction polynomiale définie par : $X^i(t) = t^i$ pour tout $t \in [0,1]$.
On étend à $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ le produit scalaire $\langle .,. \rangle$ de la partie II en posant :

$$\forall (f,g) \in (\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}))^2, \langle f,g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(On ne demande pas de vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.)
On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire : pour tout fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on a donc :

$$\|f\| = \sqrt{\langle f,f \rangle}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\Pi_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
$$\|\Pi_n - f\| = \min_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|Q - f\|.$$
NB : Il est demandé de redonner la preuve du fait que le polynôme Π_n introduit convient.
2. Montrer que la suite $(\|\Pi_n - f\|_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que H_n est la matrice du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ restreint à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4. Calculer les coefficients de Π_n à l'aide de la matrice H_{n+1}^{-1} et des réels $\langle f, X^i \rangle$.

IV Propriétés des coefficients de H_n^{-1}

On admettra les valeurs de

$$(H_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \qquad (H_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$$

A. ***Somme des coefficients de H_n^{-1}***

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $h_{i,j}^{(-1,n)}$ le coefficient de place (i,j) de la matrice H_n^{-1} et on désigne par s_n la somme des coefficients de la matrice H_n^{-1}, c'est-à-dire :

$$s_n = \sum_{1\le i,j\le n} h_{i,j}^{(-1,n)}$$

1. Calculer s_1, s_2 et s_3. Conjecturer de manière générale la valeur de s_n en fonction de n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a. Montrer qu'il existe un unique n-uplet de nombres réels $(a_p^{(n)})_{0\le p\le n-1}$ vérifiant le système de n équations linéaires à n inconnues suivant :
$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_0^{(n)} & + & \frac{a_1^{(n)}}{2} & + & \cdots & + & \frac{a_{n-1}^{(n)}}{n} & = & 1 \\ \frac{a_0^{(n)}}{2} & + & \frac{a_1^{(n)}}{3} & + & \cdots & + & \frac{a_{n-1}^{(n)}}{n+1} & = & 1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \frac{a_0^{(n)}}{n} & + & \frac{a_1^{(n)}}{n+1} & + & \cdots & + & \frac{a_{n-1}^{(n)}}{2n-1} & = & 1 \end{array}\right.$$

b. Montrer que $s_n = \sum_{p=0}^{n-1} a_p^{(n)}$.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme S_n par $S_n = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} X + \ldots + a_{n-1}^{(n)} X^{n-1}$. Dans les question suivantes de IV.A, on désigne par n un entier naturel non nul.

3. Montrer que :

$$\forall Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_{n-1} X^{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \langle S_n, Q \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p$$

4. Exprimer s_n à l'aide des coefficients $\langle S_n, K_p \rangle$, $p < n$ (où l'on reprend la suite de polynômes $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie à la question II.E).

5. Pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, calculer $K_p(1)$.

6. Déterminer la valeur de s_n.

B. ***Les coefficients de H_n^{-1} sont des entiers***

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\binom{2p}{p}$ est un entier pair.

   En déduire que, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$, alors $\binom{n+p}{p}\binom{n}{p}$ est un entier pair.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'on peut écrire : $K_n = \sqrt{2n+1}\Lambda_n$ où Λ_n est un polynôme à coefficients entiers que l'on explicitera. Parmi les coefficients de Λ_n, lesquels sont pairs ?

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   a. On note P la matrice de passage de la base $(K_0, \ldots, K_n)$ à la base canonique $(1 \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Exprimer la matrice H_n à l'aide de P.

   b. Calculer $h_{i,i}^{(-1,n)}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$; on donnera en particulier une expression très simple de $h_{1,1}^{(-1,n)}$ et $h_{n,n}^{(-1,n)}$ en fonction de n.

   c. Calculer $h_{i,j}^{(-1,n)}$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$; en déduire que les coefficients de H_n^{-1} sont des entiers.

   d. Montrer que $h_{i,j}^{(-1,n)}$ est divisible par 4 pour tout couple $(i, j) \in [\![2, n]\!]^2$.