PSI* 2023/24 DL 12

Décomposition polaire

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On note :
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à cœfficients réels ;
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- $\mathcal{O}(n)$ le groupe orthogonal d'ordre n ;
- $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles, respectivement strictement positives ;
- I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa matrice transposée, $\mathrm{Tr}\,(M)$ sa trace, et, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, m_{ij} le coefficient qui se trouve à l'intersection de la i-ème ligne et de la j -ème colonne.

I Décomposition polaire d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n.

1. (a) Montrer que si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors S est inversible et $S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors il existe $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $R^2 = S$.
2. Dans cette question, u désigne un endomorphisme de E autoadjoint défini positif. On se propose de démontrer qu'il existe un unique endomorphisme v de E autoadjoint, défini positif, tel que $v^2 = u$.
   (a) Soit v un endomorphisme de E, autoadjoint défini positif et vérifiant $v^2 = u$, et soit λ une valeur propre de u. Montrer que v induit un endomorphisme de $\ker(u - \lambda Id)$ que l'on déterminera.
   (b) En déduire v, puis conclure.
   (c) Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que $v = Q(u)$.
3. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $A^\top A \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire qu'il existe un unique couple $(O,S) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.
4. Déterminer les matrices S (tout le monde) et O (pour les courageux) lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.
5. (a) Montrer que $\mathcal{O}(n)$ est une partie fermée bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $\mathcal{S}^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (c) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une partie dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (d) *Pour cette question admettre le théorème de Bolzano Weierstrass : une suite de vecteurs appartenant à une partie fermée bornée V admet toujours une suite extraite qui converge dans V.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un couple $(O,S) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}^+(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$. Un tel couple est-il unique ?

II. Applications

Dans les questions 1 et 2 on fixe, f forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M) = \mathrm{Tr}\,(AM)$.
2. Dans cette question, A désigne la matrice définie dans la question II.1.
   (a) Justifier l'existence de $M_n = \sup(f(O), O \in \mathcal{O}(n))$.
   (b) Justifier que $A^\top A$ admet n valeurs propres positives $\mu_1, ..., \mu_n$, comptées avec multiplicités.
   (c) Montrer que $M_n = \sup(\mathrm{Tr}\,(D\Omega), \Omega \in \mathcal{O}(n))$, où D est la matrice diagonale, dont les éléments diagonaux sont $\sqrt{\mu_1}, ..., \sqrt{\mu_n}$.
   (d) En déduire que $M_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\mu_k}$.
3. Dans cette question, f désigne la forme linéaire définie par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,j}$. Que vaut M_n ?
4. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice orthogonale.