PSI* 2023/24 DS 6

Déterminant hessien constant

D'après Centrale MP 2013

Dans tout le problème, $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire euclidien canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$ et de la norme $\|\ \|$ associée.

Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et si $(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$, on note $\mathcal{C}^k(\Omega,\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de Ω dans $\mathbb{R}^n$.

Si f est dans $\mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$, on note $H_f(x,y)$ la matrice hessienne de f au point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. De plus, on dit que f vérifie (1) si et seulement si le déterminant de cette matrice hessienne est constamment égal à 1 :

$$(1)\qquad \forall (x,y)\in\Omega,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\times\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\right)^2=1$$

On note $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des fonctions polynomiales de degré ≤ 2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les applications f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$f:(x,y)\mapsto ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+h\qquad\text{où}\qquad (a,b,c,d,e,h)\in\mathbb{R}^6.$$

Le but principal du problème est de montrer que les solutions de (1) sur $\mathbb{R}^2$ appartiennent à $\mathcal{P}_2$.

I — Préliminaires

On suppose ici que $\Omega=\mathbb{R}^2$.

I.A- Déterminer les fonctions de $\mathcal{P}_2$ vérifiant (1) sur $\mathbb{R}^2$.

I.B- Soit f une fonction de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, qui vérifie (1).

I.B.1) On fixe un point $p=(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction donnée par $R(t)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx,ty)$ n'admet aucun point d'annulation pour $t\in\mathbb{R}$.

I.B.2) En déduire que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est de signe constant sur $\mathbb{R}^2$.

- Dans les deux questions suivantes, on suppose donc que $\forall p\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p)>0$.

I.B.3) Montrer que pour tout $p\in\mathbb{R}^2$, $H_f(p)$ est une matrice symétrique définie positive.

I.B.4) En déduire que pour $p=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ fixé, la fonction $t\mapsto f(tx,ty)$ est convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

I.C- On dit qu'une fonction $G\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ est coercive quand $G(p)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|p\|$ tend vers $+\infty$. Soit G une telle fonction. Montrer que G atteint un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ en un point p_0.

II — Les équations de Cauchy-Riemann

Soient f et g dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifiant les équations, dites de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}\qquad\text{et}\qquad\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial g}{\partial x}$$

On définit deux fonctions sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad \tilde{f}(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) \quad \text{et} \quad \tilde{g}(r,\theta) = g(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $\mathcal{E}_n$ l'espace des fonctions f de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad t^2 f''(t) + t\, f'(t) - n^2 f(t) = 0 \qquad (E)$$

II.A-

II.A.1) Exprimer $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta)$ en fonction de r, θ, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

II.A.2) Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, montrer $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial r} = \dfrac{1}{r} \times \dfrac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}$ et $\dfrac{\partial \tilde{g}}{\partial r} = -\dfrac{1}{r} \times \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}$.

II.B- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, soit φ_α la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi_\alpha(t) = t^\alpha$$

II.B.1) Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, déterminer les réels α tels que φ_α appartienne à $\mathcal{E}_n$.

II.B.2) Déterminer $\mathcal{E}_n$ pour $n \in \mathbb{Z}$. On discutera séparément le cas $n = 0$.

II.C- Pour $n \in \mathbb{Z}$, soient $c_{n,f}$ et $c_{n,g}$ les fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{C}$ définies par :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \begin{cases} c_{n,f}(r) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(r,\theta)\, \mathrm{e}^{-in\theta}\, \mathrm{d}\theta \\[2ex] c_{n,g}(r) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(r,\theta)\, \mathrm{e}^{-in\theta}\, \mathrm{d}\theta \end{cases}$$

II.C.1) Montrer que $c_{n,f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \qquad (c_{n,f})'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)\, \mathrm{e}^{-in\theta}\, \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{i}n}{r}\, c_{n,g}(r)$$

II.C.2) Montrer que $c_{n,f}$ appartient à $\mathcal{E}_n$ et que $c_{n,f}$ est bornée au voisinage de 0. En déduire l'existence de $\alpha_n \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \qquad c_{n,f}(r) = \alpha_n\, r^{|n|}$$

II.C.3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_{-n} = \overline{\alpha_n}$. On choisit, pour $n \neq 0$ de noter $\alpha_n = a_n + ib_n$ avec a_n et b_n réels.

- La théorie des séries de Fourier permettrait alors de prouver la formule suivante, qu'on admettra

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad \tilde{f}(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n r^{|n|}\, \mathrm{e}^{in\theta} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n r^n \cos(n\theta) + b_n r^n \sin(n\theta)\right)$$

II.D- Dans cette question, on suppose en outre que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$.

II.D.1) Si $n \in \mathbb{Z}$, montrer que la fonction $(c_{n,f})'$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

II.D.2) Montrer que pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = a_0 + a_1 x + b_1 y$ (fonction affine). .

III — Un critère de difféomorphisme

Dans cette partie, on considère $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. On pourra donc écrire $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ avec F_1 et F_2 deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

On appelle matrice jacobienne de F au point $p = (x,y)$ la matrice formée par les dérivées partielles des différentes composantes de F :

$$J_F(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(p) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(p) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(p) \end{pmatrix}$$

On suppose également dans cette partie qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $(p,h) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$:

$$\langle J_F(p).h, h \rangle \geq \alpha \|h\|^2$$

Le but de cette partie est de montrer que F est bijective.

III.A- Soient p et v dans $\mathbb{R}^2$.

III.A.1) Montrer que la matrice $J_F(p)$ est inversible.

III.A.2) On définit la fonction C par $\forall t \in \mathbb{R}$, $C(t) =< F(p+tv), v >$. Montrer que C est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée donnée en chaque point t par

$$C'(t) = \langle J_F(p+tv).v, v\rangle$$

III.A.3) Montrer :

$$\langle F(p+v) - F(p), v\rangle \geq \alpha \|v\|^2$$

III.B- Soient $a \in \mathbb{R}^2$ et G^a l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall p \in \mathbb{R}^2, \qquad G^a(p) = \|F(p) - a\|^2$$

III.B.1) Déduire de III.A.3. que G^a est une fonction coercive (voir les préliminaires).

- On sait donc que G^a atteint un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ en un point que l'on note p_0.

III.B.2) Montrer qu'en un point $p \in \mathbb{R}^2$, la différentielle de G^a est donnée par

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, \qquad \mathrm{d}G^a(p) \cdot h = 2 < F(p) - a\,,\; J_F(p).h >$$

III.B.3) Montrer que $F(p_0) = a$.

III.C- Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
Par la suite on admettra que, sous de telles hypothèses, la fonction réciproque est de classe $\mathcal{C}^1$ ($\mathcal{C}^1$ - difféomorphisme).

IV — Le théorème de Jörgens

Soit f dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant (1) sur $\mathbb{R}^2$.
Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, soient :

$$u(x,y) = x + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad v(x,y) = y + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad \text{et} \quad F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$$

On suppose dans les questions IV.A et IV.B que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) > 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

IV.A- Si $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, exprimer la matrice jacobienne $J_F(p)$ au point p. Montrer qu'elle vérifie les hypothèses de la partie III avec $\alpha = 1$.

Dans la suite, on utilisera les notations abrégées suivantes, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$r(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \quad s(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \quad t(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

de sorte que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $r(x, y) > 0$ et $r(x, y)\, t(x, y) - s(x, y)^2 = 1$.

IV.B-

IV.B.1) Montrer qu'il existe deux fonctions φ et ψ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \begin{cases} \varphi\left(u(x,y),\, v(x,y)\right) = x - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\[2ex] \psi\left(u(x,y),\, v(x,y)\right) = -y + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{cases}$$

On admettra, à la suite de la remarque faite en fin de partie III, que ces fonctions φ et ψ sont dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

IV.B.2) Calculer :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u(x,y),v(x,y)), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u(x,y),v(x,y)),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}(u(x,y),v(x,y)), \quad \frac{\partial \psi}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))$$

(que l'on abrégera en $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial \psi}{\partial u}$, $\frac{\partial \psi}{\partial v}$) en fonction de $r(x,y)$, $s(x,y)$ et $t(x,y)$ (que l'on abrégera en r, s, t).

IV.B.3) Montrer que $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$.

IV.B.4) Montrer, en utilisant la première partie, que $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ sont constantes.

IV.B.5) En déduire que r, s et t sont constantes.

IV.C- Montrer que les seules fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifiant (1) sur $\mathbb{R}^2$ appartiennent à $\mathcal{P}_2$.

V — D'autres solutions de (1)

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que $u \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ vérifie (2) sur I si et seulement si :

$$(2) \qquad \forall t \in I, \qquad u(t)\,(u(t) + 2t\,u'(t)) = -1$$

V.A- Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, f dans $\mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$ vérifiant (1) sur Ω, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\Omega_{a,b}$ l'image de Ω par la translation de vecteur (a,b) et $f_{a,b}$ la fonction définie sur $\Omega_{a,b}$ par :

$$\forall (x,y) \in \Omega_{a,b}, \qquad f_{a,b}(x,y) = f(x-a, y-b)$$

Montrer que $f_{a,b}$ vérifie (1) sur $\Omega_{a,b}$.

V.B- Soit J un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Existe-t-il une fonction polynomiale solution de (2) sur J ?

V.C- Soient J un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $\Omega_J = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \in J\right\}$, w dans $\mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})$ et W la fonction définie par :

$$\forall (x,y) \in \Omega_J, \qquad W(x,y) = w(xy)$$

V.C.1) Montrer que Ω_J est un ouvert non vide.

V.C.2) Montrer que W est dans $C^2(\Omega_J,\mathbb{R})$ et que l'on a équivalence entre :

i. W vérifie (1) sur Ω_J,

ii. w' vérifie (2) sur J.

V.C.3) Montrer qu'un tel W ne peut pas être la restriction à Ω_J d'une fonction de $\mathcal{P}_2$.

On a donc trouvé les solutions polynomiales d'une part et le moyen de construire des solutions non polynomiales d'autre part : en résolvant (2), ce qui est théoriquement possible, au moins localement.