PSI* 2023/24 Révision 3

Flot de Toda (Mines PC/PSI 2013)

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, I la matrice unité d'ordre m et e_j le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$ dont les composantes sont les $\delta_{i,j}$, $i = 1, m$ (on rappelle que $\delta_{i,j}$ est nul si $i \neq j$ et vaut 1 si $i = j$).
On note $(u|v)$ le produit scalaire des vecteurs u et v de $\mathbb{R}^m$. Les vecteurs de $\mathbb{R}^m$ seront assimilés à des matrices colonnes. $u^\top$ note la transposé du vecteur u.
L'expression $i = 1, m$ signifie "pour tout i entier tel que $1 \leq i \leq m$.

I Tridiagonalisation.

Soit u un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^m$; la matrice

$$H = I - 2uu^\top \tag{1}$$

est la matrice de Householder d'ordre m associée au vecteur u.

Q.1. Montrer que $Hu = -u$ et que $Hv = v$ dès que v est orthogonal à u.

Q.2. Démontrer que H est symétrique et orthogonale.

Q.3. Soit $g \in \mathbb{R}^m$, de composantes γ_i, $1 \leq i \leq m$, un vecteur unitaire non colinéaire à e_1. On pose $u = (g - e_1)/\sqrt{2(1-\gamma_1)}$. Montrer que u est unitaire et que $Hg = e_1$.

Q.4. En déduire que si x est un vecteur de $\mathbb{R}^m$ non colinéaire à e_1, il existe un vecteur unitaire u et une matrice de Householder associée H telle que $Hx = \|x\|e_1$.

Soient c un réel, Q une matrice symétrique réelle d'ordre $m-1$, $q_{2,1}$ un vecteur de $\mathbb{R}^{m-1}$ et $\widehat{Q} = \begin{pmatrix} c & q_{2,1}^\top \\ q_{2,1} & Q \end{pmatrix}$ une matrice définie par blocs. Si H_1 est une matrice de Householder d'ordre $m-1$, on pose $\widehat{H_1} = \begin{pmatrix} 1 & \zeta^\top \\ \zeta & H_1 \end{pmatrix}$ où ζ note le vecteur nul dans $\mathbb{R}^{m-1}$ ainsi que $\widehat{S} = \widehat{H_1}\widehat{Q}\widehat{H_1} = (\widehat{\sigma_{i,j}})_{1 \leq i,j \leq m}$.

Q.5. Montrer que $\widehat{S}$ est semblable à $\widehat{Q}$ et qu'on peut choisir H_1 de telle sorte que $\widehat{\sigma_{i,1}} = \widehat{\sigma_{1,i}} = 0$ pour $i = 3, m$.

On dit qu'une matrice $T = (\tau_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$ est tridiagonale si $\tau_{i,j} = 0$ dès que $|i - j| > 1$.

Q.6. En déduire un procédé permettant de déterminer une matrice tridiagonale symétrique semblable à $\widehat{Q}$.

II Matrices de Jacobi.

Une matrice tridiagonale symétrique réelle est encore appelée matrice de Jacobi. Soit

$$T_0 = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{m-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_{m-1} & b_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

une matrice de Jacobi d'ordre m. On pose $a_0 = a_m = 0$ et on suppose que $a_i \neq 0$, $i = 1, m$. On note $\sigma(T_0)$ le spectre de T_0, c'est à dire l'ensemble de ses valeurs propres.

Q.7. Soit $\lambda \in \sigma(T_0)$ et x un vecteur propre associé de composantes ξ_j, $j = 1, m$. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\xi_m \neq 0$.

Q.8. Démontrer que les sous-espaces propres de T_0 sont de dimension 1. Quel est le cardinal de $\sigma(T_0)$?

III Paires de Lax.

On remplace désormais les a_i et les b_i par des fonctions à valeurs réelles α_i et β_i de la variable réelle t. On pose alors

$$T(t) = \begin{pmatrix} \beta_1(t) & \alpha_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1(t) & \beta_2(t) & \alpha_2(t) & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_2(t) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_{m-1}(t) \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{m-1}(t) & \beta_m(t) \end{pmatrix} \tag{3}$$

ainsi que

$$U(t) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_1(t) & 0 & \alpha_2(t) & \ddots & \vdots \\ 0 & -\alpha_2(t) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_{m-1}(t) \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha_{m-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

et on étudie le système différentiel non linéaire suivant :

$$\begin{cases} T'(t) = U(t)T(t) - T(t)U(t), \ t \in \mathbb{R} \\ T(0) = T_0 \ \text{ donné par (2)} \end{cases} \tag{5}$$

dont on admettra qu'il possède une solution et une seule $T(t)$ définie sur $\mathbb{R}$. Le couple $(T(t), U(t))$ constitue une *paire de Lax.*

Q.9. Etant donnée $T(t)$ solution de (5), et donc $U(t)$, démontrer que le système différentiel

$$\begin{cases} V'(t) = U(t)V(t), \ t \in \mathbb{R} \\ V(0) = I \end{cases} \tag{6}$$

admet une solution et une seule $V(t)$ sur $\mathbb{R}$ *Admettre : vous n'avez plus au programme cette version générale de Cauchy Lipschitz linéaire.*

Q.10. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $V(t)$ solution de (6) est orthogonale.

Q.11. Montrer que $V^\top(t)T(t)V(t)$ est une matrice constante que l'on déterminera. Les valeurs propres de $T(t)$ dépendent-elles de t ?

On montre facilement, et on admettra, que le système différentiel (5) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \alpha_i'(t) = \alpha_i(t)(\beta_{i+1}(t) - \beta_i(t)), \ i = 1, m-1 \\ \beta_i'(t) = 2(\alpha_i^2(t) - \alpha_{i-1}^2(t)), \ i = 1, m \end{cases} \tag{7}$$

avec $\alpha_i(0) = a_i, \ i = 1, m-1, \ \beta_i(0) = b_i, \ i = 1, m$ et $\alpha_0(t) = 0 = \alpha_m(t), \ \forall t \in \mathbb{R}$. C'est le système de Toda.

IV Etude asymptotique.

Pour tout réel t, on pose

$$L(t) = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \beta_i^2(t) \tag{8}$$

Q.12. Montrer que la fonction L est constante. En déduire que les fonctions β_i sont bornées sur $\mathbb{R}$, soit par D.

Q.13. Pour $1 \leq i \leq m-1$, montrer que $2\int_0^t \alpha_i^2(t)\,dt = \sum_{j=1,i}(\beta_j(t) - b_j)$ et en déduire que les α_i^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

Q.14. En déduire que les $\beta_i(t)$, $i = 1, m$, possèdent une limite lorsque $t \to \pm\infty$.

Q.15. Déduire des résultats des questions précédentes que la fonction $\alpha_i \alpha_i'$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En déduire la limite de $\alpha_i(t)$ lorsque $t \to \pm\infty$.

On note $\chi_t(\lambda) = \det(\lambda I - T(t))$ le polynôme caractéristique de la matrice $T(t)$ et λ_i, $i = 1, m$, les valeurs propres de $T(t)$ rangées dans l'ordre décroissant.
Les limites de $\beta_i(t)$ pour $t \to +\infty$ ou $t \to -\infty$ seront respectivement notées β_i^+ et β_i^- ; l'ensemble des β_i^+, $i = 1, m$, sera noté B^+ et celui des β_i^- sera noté B^-.

Q.16. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_t(\lambda)$ tend vers $\prod_{i=1,m}(\lambda - \beta_i^+)$ (respectivement vers $\prod_{i=1,m}(\lambda - \beta_i^-)$) lorsque $t \to +\infty$ (respectivement $-\infty$).

Q.17. En déduire que $\sigma(T) = B^+ = B^{`}$.

On rappelle que, par hypothèse, $\alpha_i(0) = a_i \neq 0$, $i = 1, m-1$.
Pour i fixé compris entre 1 et $m-1$, on note $A^+ = \{t > 0/\ \alpha_i(t) = 0\}$ et $A^- = \{t < 0/\ \alpha_i(t) = 0\}$.

Q.18. On suppose que A^+ n'est pas vide et on pose $\tau = \inf\{t/\ t \in A^+\}$. Déterminer la valeur de $\alpha_i(\tau)$ et montrer que pour $t \in]0, \tau[$, $\alpha_i(t)$ est du même signe que a_i.

Q.19. En supposant toujours que A^+ n'est pas vide, montrer que

$$\forall t \in [0, \tau[,\ \ |\ln|\alpha_i(t)| - \ln|\alpha_i(0)|| \leq 2D\tau$$

En déduire que nécessairement $A^+ = \emptyset$, puis que α_i ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$.

Q.20. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\beta_{i+1}^+ < \beta_i^+$, $i = 1, m-1$. En déduire que $\beta_i^+ = \lambda_i$, $i = 1, m$.

Q.21. Montrer que si δ est choisi tel que $0 < \delta < \beta_i^+ - \beta_{i+1}^+$, $i = 1, m-1$, alors il existe S et C strictement positifs tels que $\forall s > S,\ |\alpha_i(s)| < Ce^{-\delta s}$, $i = 1, m-1$. En déduire quil existe $C' > 0$ tel que pour $t > S$, $|\lambda_i - \beta_i(t)| < C'e^{-2\delta t}$, $i = 1, m$.