

# Mines PC/PSI 2021 - Variables à forte dispersion

Dans tout le sujet, on fixe un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  sur lequel toutes les variables aléatoires considérées sont définies. On utilisera systématiquement la locution « variable aléatoire » pour parler d'une variable aléatoire réelle discrète, et « variable aléatoire entière » pour parler d'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ . On pourra noter :

$$X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$$

où  $I$  est un sous-ensemble fini ou dénombrable de  $\mathbb{N}$  et  $x_n \in \mathbb{R}$  pour tout  $n \in I$ .

## Déf - Dispersion d'ordre $\alpha$

On fixe un réel  $\alpha > 0$ . Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire. On dit que  $X$  vérifie la condition  $(\mathcal{D}_\alpha)$  – dite de dispersion d'ordre  $\alpha$  – lorsque, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\mathbb{P}(|X| \geq n) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (1.1)$$

## Déf - Variables aléatoires symétriques

On dit que  $X$  est symétrique lorsque  $-X$  suit la même loi que  $X$ , autrement dit lorsque :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = -x). \quad (1.2)$$

On admet le *principe de transfert de l'égalité en loi* :

## Propriété 1. Transfert

Étant donné deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  prenant leurs valeurs dans un même ensemble  $E$ , ainsi qu'une application  $u : E \rightarrow F$ , si  $X$  et  $Y$  suivent la même loi alors  $u(X)$  et  $u(Y)$  aussi.

Dans tout le sujet, on se donne une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires entières, mutuellement indépendantes, toutes de même loi, symétriques, et vérifiant la condition  $(\mathcal{D}_\alpha)$ . On *admet* que sous ces conditions la variable  $X_{n+1}$  est indépendante de  $X_1 + \dots + X_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$M_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

appelée  $n^e$  moyenne empirique des variables  $X_k$ . L'objectif du sujet est d'établir la convergence simple d'une suite de fonctions associées aux variables  $M_n$ .

Les trois premières parties du sujet sont totalement indépendantes les unes des autres.

## Questions de cours

1. Soit  $X$  une variable aléatoire. Rappeler la définition de «  $X$  est d'espérance finie ». Montrer alors que  $X$  est d'espérance finie si et seulement si  $|X|$  est d'espérance finie.
2. Soit  $X$  une variable aléatoire. Montrer que si  $X$  est bornée, autrement dit s'il existe un réel  $M \geq 0$  tel que  $\mathbb{P}(|X| \leq M) = 1$ , alors  $X$  est d'espérance finie.

## Généralités sur les variables aléatoires

3. Soit  $X$  une variable aléatoire entière vérifiant  $(\mathcal{D}_\alpha)$ . Montrer que  $X$  n'est pas d'espérance finie, et que  $X^2$  non plus.
4. Soient  $X$  une variable aléatoire symétrique, et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction impaire. Montrer que  $f(X)$  est symétrique, et que si  $f(X)$  est d'espérance finie alors  $\mathbf{E}(f(X)) = 0$ .
5. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires symétriques indépendantes. En comparant la loi de  $(-X, -Y)$  à celle de  $(X, Y)$ , démontrer que  $X + Y$  est symétrique.

## Deux sommes de séries

On fixe ici un nombre complexe  $z$  tel que  $z \neq 1$  et  $|z| \leq 1$ . On introduit la fonction :

$$L : t \mapsto \int_0^t \frac{z}{1 - uz} du.$$

6. Montrer que, sur le segment  $[0, 1]$ , la fonction  $L$  est convenablement définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Donner une expression simple de sa dérivée  $n^e$  pour tout  $n \geq 1$ .
7. Justifier que pour tout  $t \in ]0, 1]$ , on a  $1 - t \leq |1 - tz|$ , et plus précisément encore que  $1 - t < |1 - tz|$ .
8. En déduire successivement que :

$$\int_0^1 \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

9. En déduire, grâce à une formule de Taylor, que  $L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ .

10. Montrer que la fonction :

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, u) & \longmapsto |1 + ue^{it}| \end{cases}$$

est continue. En déduire qu'il existe, pour tout  $a \in ]0, \pi[$ , un réel  $m_a > 0$  tel que :

$$\forall (t, u) \in [-a, a] \times [0, 1], \quad |1 + ue^{it}| \geq m_a.$$

11. Montrer que la fonction :

$$F : t \in ]-\pi, \pi[ \mapsto \int_0^1 \frac{e^{it}}{1 + ue^{it}} du$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale à paramètre.

12. Montrer que :

$$\forall t \in ]-\pi, \pi[, \quad F'(t) = -\frac{\tan(t/2)}{2} + \frac{i}{2}$$

et en déduire la valeur de  $F(t)$  pour tout  $t \in ]-\pi, \pi[$ .

13. Soit  $\theta \in ]0, 2\pi[$ . Déduire des questions précédentes que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln \left( 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

# Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

On fixe dans cette partie une variable aléatoire symétrique  $X$ . On pose :

$$\Phi_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathbf{E}(\cos(tX)), \end{cases}$$

appelée fonction caractéristique de  $X$ .

14. Montrer que  $\Phi_X$  est bien définie, paire et que :  $\forall t \in \mathbb{R}, |\Phi_X(t)| \leq 1$ .  
 15. En utilisant le théorème du transfert, montrer que  $\Phi_X$  est continue.

Dans la suite de cette partie, on suppose que  $X$  est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant la condition  $(\mathcal{D}_\alpha)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$R_n := \mathbb{P}(|X| \geq n).$$

16. On fixe un réel  $t \in ]0, 2\pi[$ . Montrer successivement que :

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt)$$

puis :

$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n [\cos(nt) - \cos((n-1)t)].$$

*On pourra établir au préalable la convergence de la série  $\sum_n R_n \cos(nt)$ .*

17. Montrer qu'il existe un nombre réel  $C$  tel que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( R_n - \frac{\alpha}{n} \right) e^{int} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\phantom{C}} C,$$

et en déduire que, quand  $t$  tend vers  $0^+$ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = O(\ln(t)) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi\alpha}{2} + o(1).$$

18. Conclure que, quand  $t$  tend vers  $0^+$ ,

$$\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi\alpha}{2}t + o(t).$$

La fonction  $\Phi_X$  est-elle dérivable en 0 ?

## Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables $M_n$

19. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires symétriques indépendantes. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).$$

20. Démontrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , la variable  $M_n$  est symétrique, et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = (\Phi_{X_1}(t/n))^n.$$

21. En déduire que pour tout réel  $t$ ,

$$\Phi_{M_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\phantom{C}} \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right).$$

22. La convergence établie à la question précédente est-elle uniforme sur  $\mathbb{R}$  ?

À partir de là, des théorèmes d'analyse de Fourier permettraient de démontrer que la suite  $(M_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers une variable de Cauchy de paramètre  $\frac{\pi\alpha}{2}$ , ce qui signifie que pour tout segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{P}(a \leq M_n \leq b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{2} \int_a^b \frac{du}{u^2 + (\pi\alpha/2)^2}.$$