PSI* 2023/24 Révision 5

Méthodes itératives pour la résolution de système

Sujet X PSI2019, réécrit

Notations

Soit $N \geq 2$ un entier. On munit l'espace $\mathbb{R}^N$ du produit scalaire canonique et de la norme associée, respectivement notés

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \qquad \|x\| = \big(\langle x, x \rangle\big)^{1/2}$$

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre N à coefficients réels, $\mathcal{S}_\mathrm{n}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel réel des matrices symétriques et $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble (des matrices symétriques "définies positives") défini de la façon suivante :

$$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \big\{A \in \mathcal{S}_\mathrm{n}(\mathbb{R}) \ /\forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \langle Ax, x \rangle \ > 0\big\}\,.$$

Pour tout polynôme $P(X) = c_k X^k + c_{k-1} X^{k-1} + \cdots + c_0 \in \mathbb{R}[X]$ et toute matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $P(M)$ la matrice

$$P(M) = c_k M^k + c_{k-1} M^{k-1} + \cdots + c_0 I_N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

où $I_N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice identité.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note M^T sa transposée.

On rappelle le théorème spectral : toute matrice $A \in \mathcal{S}_\mathrm{n}(\mathbb{R})$ admet une base orthonormale de vecteurs propres. En particulier, si l'on note $\mu_1 < \cdots < \mu_d$ les d valeurs propres de A (distinctes deux à deux), et $F_1, \ldots, F_d$ les sous-espaces propres associés, $\mathbb{R}^N$ est somme directe orthogonales des F_i, c'est-à-dire que tout $x \in \mathbb{R}^N$ s'écrit de façon unique

$$x = \sum_{i=1}^{d} p_{F_i}(x)$$

où p_{F_i} est la projection orthogonale de $\mathbb{R}^N$ sur F_i.

Ce problème porte sur la résolution effective du problème $Ax = b$, où $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, plus précisément sur la construction et l'étude, à partir d'un vecteur initial x_0 arbitraire, d'une suite $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots$ de $\mathbb{R}^N$ telle que x_k se rapproche en un certain sens de la solution $\tilde{x}$ du système, et même s'identifie à la solution $\tilde{x}$ à partir d'un certain rang.

Partie I

1. Soit $A \in \mathcal{S}_\mathrm{n}(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes réelles strictement positives.

2. Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $|||B||| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Bx\|$. Justifier l'existence de $|||B|||$ et prouver

$$\forall x \in \mathbb{R}^N \quad \|Bx\| \leq |||B|||\,\|x\|\,.$$

3. Soit $A \in \mathcal{S}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$|||A||| = \max_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} |\lambda|.$$

4. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Pour tous x, y de $\mathbb{R}^N$, on pose

$$\langle x, y\rangle_A = \langle x, Ay\rangle \qquad \|x\|_A = \langle x, Ax\rangle^{1/2}\,.$$

a. Montrer que, sur $\mathbb{R}^N$, l'application $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle_A$ est un produit scalaire, et $x \mapsto \|x\|_A$ est une norme.

b. Montrer qu'il existe des constantes C_1 et C_2 strictement positives, que l'on exprimera en fonction des valeurs propres de A, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^N \quad C_1 \|x\| \leq \|x\|_A \leq C_2 \|x\|\,.$$

NB : l'énoncé originel n'introduisait pas explicitement le produit scalaire $\langle ., .\rangle_A$ alors que c'est l'élément crucial pour résoudre de nombreuses questions tout au long du devoir. Vous êtes prévenus...

5. Soit $A \in \mathcal{S}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R})$ et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Montrer que $P(A) \in \mathcal{S}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R})$. Préciser les valeurs propres de $P(A)$ en fonction de celles de A, et indiquer comment obtenir une base de diagonalisation de $P(A)$.

6. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On note $0 < \mu_1 < \cdots < \mu_d$ les d valeurs propres de A (distinctes deux à deux) et et $F_1, \ldots, F_d$ les sous-espaces propres associés. On note p_{F_i} la projection orthogonale (pour le produit scalaire canonique) sur F_i.

On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$:

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{d} \mu_i^{1/2} p_{F_i}(x),$$

On note $A^{1/2}$ la matrice associée à cette application linéaire dans la base canonique.

a. Montrer que $A^{1/2}A^{1/2} = A$, et que $A^{1/2}$ commute avec A.

b. Montrer que $A^{1/2} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

c. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $\|x\|_A = \left\|A^{1/2}x\right\|$, où $\|x\|_A$ est la norme définie à la question 4.

Partie II

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On supposera dans toute la suite du problème que la matrice A n'est pas proportionnelle à l'identité. On note d le cardinal de $\operatorname{Sp} A$, c'est-à-dire le nombre de valeurs propres de A.

On se donne $b \in \mathbb{R}^N$ et l'on note $\tilde{x} \in \mathbb{R}^N$ l'unique vecteur qui vérifie $A\tilde{x} = b$. On se donne un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^N$, différent de $\tilde{x}$, et l'on note $r_0 = b - Ax_0$. On pose $H_0 = \{0\}$ et pour $k \geq 1$,

$$H_k = \{P(A)r_0 \,/ P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) \leq k-1\}\,,$$

7.

a. Pourquoi l'énoncé peut-il affirmer l'existence et l'unicité de $\tilde{x} \in \mathbb{R}^N$ vérifiant $A\tilde{x} = b$?

b. Montrer que les H_k forment une suite de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^N$, et montrer que $H_k \subset H_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c. Montrer qu'il existe nécessairement k tel que $H_{k+1} = H_k$. On note alors m le plus petit entier k tel que $H_{k+1} = H_k$.

d. Montrer que $\dim(H_k) = m$ pour tout $k \geq m$, et que $\dim(H_k) = k$ pour $k \leq m$.

8. On garde la notation m de la question précédente

a. Montrer que $m \geq 1$. Dans le cas particulier où r_0 est un vecteur propre de A, montrer que l'entier m est égal à 1.

b. Dans le cas général, montrer que m est inférieur ou égal à d.

9. Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré m (l'entier m est défini dans la question 7) tel que $Q(A)e_0 = 0$, où $e_0 = x_0 - \tilde{x}$.

10. Montrer que le polynôme Q de la question précédente vérifie $Q(0) \neq 0$.

11. On définit $x_0 + H_k$ comme le sous-ensemble des points de $\mathbb{R}^N$ de la forme $x_0 + x$ où x décrit l'espace vectoriel H_k.

a. Montrer que $\tilde{x} \in x_0 + H_m$.

b. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \ldots, m-1\}$, on a $\tilde{x} \notin x_0 + H_k$.

Partie III

On garde dans cette partie les notations de la partie II. On introduit l'application

$$\begin{aligned} J : \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle - \langle b, x\rangle = \frac{1}{2}\langle x, x\rangle_A - \langle x, \tilde{x}\rangle_A . \end{aligned}$$

12. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, exprimer $\|x - \tilde{x}\|_A^2 = \langle x - \tilde{x}, A(x - \tilde{x})\rangle$ en fonction de $J(\tilde{x})$ et de $J(x)$ et en déduire que $\tilde{x}$ est l'unique minimiseur de J sur $\mathbb{R}^N$, c'est-à-dire que $J(\tilde{x}) \leq J(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, et que $\tilde{x}$ est le seul point qui vérifie cette propriété.

13.

a. Montrer qu'on peut introduire u_k, projection orthogonale de $\tilde{x} - x_0$ sur H_k (défini à la question 11) pour le produit scalaire $\langle ., .\rangle_A$. On pose dorénavant $x_k = x_0 + u_k$.

b. Montrer que x_k est un minimiseur de J sur le sous-ensemble $x_0 + H_k$, et en fait l'unique minimiseur de J sur cet ensemble.

On notera $r_k = b - Ax_k$ et $e_k = x_k - \tilde{x}$. On remarquera que $r_k = -Ae_k$.

14. Montrer que $e_k \neq 0$ pour $k \in \{0, \ldots, m-1\}$, et que $e_k = 0$ pour $k \geq m$.

15. On rappelle que I_N est la matrice identité d'ordre N. Montrer que

$$\|e_k\|_A = \min\left\{\|(I_N + AQ(A))e_0\|_A \;/ Q \in \mathbb{R}[X], \deg(Q) \leq k-1\right\}.$$

16. Montrer que

$$\|e_k\|_A \leq \|e_0\|_A \min\left\{|||I_N + AQ(A)||| \;/ Q \in \mathbb{R}[X], \deg(Q) \leq k-1\right\},$$

où $|||\cdot|||$ est définie dans la question 2.
(On pourra utiliser les propriétés sur $A^{1/2}$ démontrées dans la question 6.)

17. On note μ_1 (respectivement μ_d) la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de A, et l'on définit

$$\Lambda_k = \{R \in \mathbb{R}[X] \,/\, \deg(R) \leq k, R(0) = 1\}.$$

Montrer que

$$\|e_k\|_A \leq \|e_0\|_A \min_{R \in \Lambda_k} \max_{t \in [\mu_1, \mu_d]} |R(t)|.$$

Partie IV

On garde les notations des parties précédentes. En particulier, on note toujours x_k le minimiseur de J sur $x_0 + H_k$ (voir question 13).

18. Montrer qu'il existe une famille $(p_0, \ldots, p_{m-1})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^N$ telle que

(i) Pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, la famille $(p_0, \ldots, p_{k-1})$ est une base de H_k.

(ii) La famille est orthogonale pour le produit scalaire associé à A, c'est-à-dire que

$$\forall i, j \in \{0, \ldots, m-1\} \quad i \neq j \Rightarrow \langle Ap_i, p_j\rangle = 0.$$

19. On suppose connue une famille $(p_0, \ldots, p_{m-1})$ de vecteurs vérifiant les propriétés de la question précédente. Montrer que $x_{k+1} - x_k$ est alors colinéaire à p_k pour tout entier $k \in \{0, \ldots, m-1\}$.

20. On se donne $x_0 \in \mathbb{R}^N$. On considère les suites réelles finies (α_k) et (β_k), ainsi que les suites finies $(\tilde{x}_k)$, $(\tilde{r}_k)$ et $(\tilde{p}_k)$ d'éléments de $\mathbb{R}^N$, construites selon les relations de récurrences suivantes, pour $k \in \{0, \ldots, m-1\}$,

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{\|\tilde{r}_k\|^2}{\langle A\tilde{p}_k, \tilde{p}_k\rangle}, \\ \tilde{x}_{k+1} &= \tilde{x}_k + \alpha_k \tilde{p}_k, \\ \tilde{r}_{k+1} &= \tilde{r}_k - \alpha_k A\tilde{p}_k, \\ \beta_k &= \frac{\|\tilde{r}_{k+1}\|^2}{\|\tilde{r}_k\|^2}, \\ \tilde{p}_{k+1} &= \tilde{r}_{k+1} + \beta_k \tilde{p}_k, \end{aligned}$$

avec $\tilde{x}_0 = x_0$, $\tilde{r}_0 = b - Ax_0$ et $\tilde{p}_0 = \tilde{r}_0$.

Montrer que les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $k \in \{0, \ldots, m-1\}$, pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, on a

$$\langle \tilde{r}_i, \tilde{r}_k \rangle = 0,\ \langle \tilde{p}_i, \tilde{r}_k \rangle = 0,\ \langle \tilde{p}_i, A\tilde{p}_k \rangle = 0.$$

(ii) Pour tout $k \in \{0, \ldots, m\}$, $\tilde{x}_k$ s'identifie à x_k, le minimiseur de J sur $x_0 + H_k$ défini dans la question 13.

(iii) Pour tout $k \in \{0, \ldots, m\}$, $\tilde{r}_k$ s'identifie à $r_k = b - Ax_k$.

(iv) La famille $(\tilde{p}_0, \ldots, \tilde{p}_k)$ est une base de H_{k+1}, pour tout $k \in \{0, \ldots, m-1\}$.

Partie V

Les questions qui suivent portent sur la construction explicite d'un polynôme permettant de préciser la majoration obtenue à la fin de la partie III.

Soit k un entier positif ou nul.

On définit la fonction f_k de l'intervalle $[-1, 1]$ dans lui-même par $f_k(x) = \cos(k \arccos x)$.

21. a. Développer l'expression $f_{k+1}(x) + f_{k-1}(x)$, et en déduire la relation

$$\forall x \in [-1, 1] \quad f_{k+1}(x) = 2x f_k(x) - f_{k-1}(x).$$

b. En déduire que f_k s'identifie sur $[-1, 1]$ à un polynôme T_k, de degré k, de même parité que k.

22. On note argch la fonction réciproque du cosinus hyperbolique[1], définie de $[1, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$. Montrer que

$$\forall x \in]-\infty, -1] \quad T_k(x) = (-1)^k \operatorname{ch}(k \operatorname{argch}(-x)).$$

23. On rappelle que A, par hypothèse énoncée au début de la partie II, n'est pas proportionnelle à l'identité. On pose $\omega_k = \frac{1}{T_k\left(-\frac{\mu_d+\mu_1}{\mu_d-\mu_1}\right)}$. Montrer que ω_k est bien défini, que le polynôme

$$Q_k(X) = \omega_k T_k\left(\frac{2X - \mu_1 - \mu_d}{\mu_d - \mu_1}\right)$$

est élément de Λ_k (ensemble défini à la question 17), et que le maximum de $|Q_k(t)|$ sur $[\mu_1, \mu_d]$ est $|\omega_k|$.

24. On pose $\theta = \operatorname{argch}\left(\frac{\mu_d+\mu_1}{\mu_d-\mu_1}\right) > 0$ et $\alpha = e^{-\theta}$. Montrer que α est une racine du polynôme

$$X^2 - 2\frac{\mu_d + \mu_1}{\mu_d - \mu_1}X + 1$$

et en déduire l'expression de α en fonction de la quantité $\beta = \frac{\mu_d+\mu_1}{\mu_d-\mu_1}$.

25. On note $\kappa = \mu_d/\mu_1$. Montrer que le réel α de la question précédente vaut $\alpha = \frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}$ et en déduire que

$$\|e_k\|_A = \|x - \tilde{x}\|_A \leq 2\, \|e_0\|_A \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1}\right)^k.$$

1. On n'utilisera de cette notion hors programme que le fait que $\operatorname{argch}(1) = 0$, et $\operatorname{ch}(\operatorname{argch}(-x)) = -x$ pour $x \in]-\infty, -1]$.