PSI* 2023/24 Révision 6

Laplace et formule des compléments

Sujet Centrale PC 1998

On note E l'ensemble des fonctions f continues sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ à valeurs complexes telles que, pour tout nombre réel $s > 0$, la fonction

$$u \mapsto \frac{f(u)}{u+s}$$

soit intégrable sur I.

On note $\widehat{f}$ la fonction définie sur I par la formule

$$\widehat{f}(s) = \int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u+s}\ \mathrm{d}u.$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés de la fonction $\widehat{f}$.

En partie III on admettra la formule suivante (dite de Fubini) : pour une fonction f continue sur un produit de segments $[a, b] \times [c, d]$,

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$$

Cette formule n'est en fait pas très dure à prouver (conséquence du théorème de dérivation sous $\int$)

Partie I - Étude de E

I.A - Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et stable par l'application $f \longmapsto |f|$.

I.B - On note L l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes continues et intégrables sur I. Comparer au sens de l'inclusion les espaces vectoriels L et E.

I.C - Pour tout nombre réel α , on note f_α la fonction définie sur I par $f_\alpha(u) = u^{\alpha-1}$.

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f_α appartient à E, et prouver alors que $\widehat{f_\alpha}$ est proportionnelle à f_α.

On exprimera le coefficient de proportionalité à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

Partie II - Propriétés de $\widehat{f}$

Soit f une fonction appartenant à E.

II.A - Montrer que la fonction $\widehat{f}$ est continue sur I.

II.B - Comportement asymptotique de $\widehat{f}$ en $+\infty$.

II.B.1) Déterminer la limite de $\widehat{f}$ en $+\infty$.

II.B.2) On suppose de plus f intégrable sur I.

Déterminer la limite, lorsque s tend vers $+\infty$, de

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{\frac{u}{s}+1}\ \mathrm{d}u.$$

À quelle condition ce résultat permet-il d'obtenir un équivalent de $\widehat{f}$ au voisinage de $+\infty$? Donner dans ce cas cet équivalent.

II.B.3) Donner des conditions suffisantes portant sur f permettant d'obtenir un développement limité à tout ordre de la fonction $\widehat{f}$ en $+\infty$.

Donner un tel développement ainsi qu'un exemple de fonction vérifiant les conditions trouvées : on pourra observer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{u+s} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{u^k}{s^{k+1}} + (-1)^n \left(\frac{u}{s}\right)^n \frac{1}{u+s}.$$

II.C - Soit a un nombre réel strictement positif.

Pour tout nombre réel h tel que $|h| < a$ établir que

$$\widehat{f}(a+h) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{(u+a)^{p+1}} \, \mathrm{d}u \right) h^p.$$

Que vient-on de démontrer pour $\widehat{f}$? Que peut-on en déduire ?

Partie III - Expression de $\widehat{f}$ comme transformée de Laplace

On note F le sous-espace vectoriel des fonctions complexes continues sur I telles que, pour tout nombre réel $x > 0$, la fonction

$$u \longmapsto e^{-xu} f(u)$$

soit intégrable sur I. La fonction Lf définie alors par la formule

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xu} f(u) \, \mathrm{d}u$$

s'appelle la transformée de Laplace de f.

III.A - Transformée de Laplace d'un élément de E.

III.A.1) Soit x un nombre réel > 0 . Justifier l'existence du nombre réel

$$M(x) = \sup_{u>0} (e^{-xu}(1+u)).$$

Comparer $M(x_1)$ et $M(x_2)$ lorsque $0 < x_1 < x_2$.

III.A.2) Montrer que E est contenu dans F.

III.A.3) Soit f une fonction appartenant à E.

a) Montrer que la fonction Lf est continue sur I.
Quel est son comportement en $+\infty$?

b) Donner une condition suffisante portant sur f pour que Lf possède une limite en 0^+. Donner un exemple de fonction réelle appartenant à E telle que

$$\lim_{x \to 0^+} Lf(x) = +\infty.$$

III.B - Transformée de Laplace d'une fonction de type Lf où f appartient à E.

Soit f un élément de E.

III.B.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note g_n la fonction définie sur I par la formule

$$g_n(x) = \int_{1/n}^{n} e^{-xu} f(u) \, \mathrm{d}u.$$

Montrer que g_n est continue sur I.

Quel lien existe-t-il entre la suite $(g_n)_{n \geqslant 1}$ et la fonction Lf ?

III.B.2) Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$ et n un entier naturel non nul. Pour tout $s \in I$, montrer que

$$\int_a^b e^{-sx} g_n(x) \, \mathrm{d}x = e^{-sa} \int_{1/n}^{n} e^{-au} \frac{f(u)}{u+s} \, \mathrm{d}u - e^{-sb} \int_{1/n}^{n} e^{-bu} \frac{f(u)}{u+s} \, \mathrm{d}u.$$

En déduire que

$$\int_a^b e^{-sx} Lf(x) \, \mathrm{d}x = e^{-sa} \int_0^{+\infty} e^{-au} \frac{f(u)}{u+s} \, \mathrm{d}u - e^{-sb} \int_0^{+\infty} e^{-bu} \frac{f(u)}{u+s} \, \mathrm{d}u.$$

III.B.3) Montrer que $\displaystyle\int_a^b e^{-sx} Lf(x) \, \mathrm{d}x$ admet une limite lorsque a tend vers 0 et que b tend vers $+\infty$.

III.B.4) Montrer que Lf est élément de F et que sa transformée de Laplace est $\widehat{f}$, c'est-à-dire que, pour tout $s \in I$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} Lf(x) \, \mathrm{d}x = \widehat{f}(s)$$

III.B.5) *Application.* Soit α un élément de $]0,1[$.
En considérant la fonction f_α définie au I.C, établir que
$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} \ \mathrm{d}u$$
où Γ est la fonction définie sur I par la formule
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{\alpha-1} \ \mathrm{d}y.$$

Partie IV - Calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} \ \mathrm{d}u$

On se propose d'établir la formule
$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{ue^{i\lambda}+1} \ \mathrm{d}u = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{-i\lambda\alpha} \tag{1.1}$$
où α appartient à $]0,1[$ et λ appartient à $]-\pi,\pi[$.

IV.A - Étudier l'intégrabilité de $u \longmapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{ue^{i\lambda}+1}$ sur I lorsque α appartient à $]0,1[$ et λ appartient à $]-\pi,\pi[$.

IV.B - On pose
$$\gamma(\alpha,\lambda) = e^{i\lambda\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{ue^{i\lambda}+1} \ \mathrm{d}u,\ 0<\alpha<1,\ -\pi<\lambda<\pi$$
Montrer que, pour tout $0<\alpha<1$, la fonction $\lambda \longmapsto \gamma(\alpha,\lambda)$ est constante sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$ (on pourra observer que si λ_0 est un élément de $]0,\pi[$, pour tout $u>0$ et tout $|\lambda| \leqslant \lambda_0$, $\left|ue^{i\lambda}+1\right|^2 \geqslant \left|ue^{i\lambda_0}+1\right|^2$).

IV.C - En utilisant la relation $\gamma(\alpha,-\lambda) = \gamma(\alpha,\lambda)$ et la formule d'Euler
$$\sin \lambda\alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\lambda\alpha} - e^{-i\lambda\alpha})$$
montrer que, pour tout $0<\lambda<\pi$,
$$\gamma(\alpha,\lambda)\sin\lambda\alpha = \sin\lambda \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1+2u\cos\lambda+u^2} \ \mathrm{d}u.$$
À l'aide d'un changement de variable, prouver que
$$\gamma(\alpha,\lambda)\sin\lambda\alpha = \int_{\operatorname{cotan}\lambda}^{+\infty} \frac{(u\sin\lambda-\cos\lambda)^\alpha}{u^2+1} \ \mathrm{d}u.$$

IV.D - En introduisant une suite d'éléments de $]0,\pi[$ convergeant vers π, obtenir la formule (1). Calculer finalement l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} \ \mathrm{d}u$$
et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \ \mathrm{d}t.$$