PSI* 2023/24 DL 1

Théorie du degré

Instructions et objectifs

Je suis parti d'un sujet de concours difficile que j'ai raccourci et simplifié, la version originale était sans doute "too much" en plus de comporter des volets qui vous sont inaccessibles actuellement.

Avec cette version retravaillée, mon objectif est que vous voyiez comment s'attaquer à un sujet assez ambitieux mais ayant surtout une structure très unie, très liée. Il faut donc avoir deux règles constamment en tête :
- pour résoudre une question à l'intérieur d'une partie, on fait ré-intervenir les questions précédentes, et notamment on cherche vraiment à voir si on peut ré-employer la question qui précède immédiatement
- à la fin d'une partie on fait le bilan de ce qui a été fait, car les résultats établis resserviront.

Mes conseils : soyez rigoureux, précis et attentif aux enchaînements au début ; les premières questions sont réputées plus faciles et permettent de se familiariser avec les objets.
Progressivement vous tomberez sur des questions plus difficiles, il faut parfois apprendre à passer des questions et à continuer quand même. Typiquement ça peut se produire en question 9 (question en fait pas très difficile mais avec une présentation déconcertante), en 13b (idée un peu astucieuse pour vérifier que f convient), et bien sûr en 15.

Je prévois une diffusion progressive d'indications...

Conventions et notations

Dans tout le problème, T désigne un réel strictement positif.
Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui est bornée on notera $\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$. On rappelle qu'il s'agit d'une borne supérieure, qui n'est pas nécessairement atteinte.
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1. On note $\mathcal{F}_T$ l'ensemble des applications T-périodiques et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$ et $\mathcal{F}_T^1$ l'ensemble des applications T-périodiques et de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.

IL N'Y A PAS DE FONCTION ln SUR LE PLAN COMPLEXE : QU'ON SE LE DISE !

Première partie : relèvement

On appelle *relèvement* de $u \in \mathcal{F}_T$ une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $u = e^{if}$, c'est-à-dire $\forall t \in \mathbb{R}, u(t) = e^{if(t)}$.

1.a. On considère le cas de la fonction constante u égale à 1. Montrer qu'elle admet au moins un relèvement que l'on précisera. Proposer également une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-périodique, telle que $u = e^{if}$, mais qui n'est pas un relèvement.

1.b. Soient u, v dans $\mathcal{F}_T$. Montrez que si f est un relèvement de u et g un relèvement de v, alors $f+g$ est un relèvement de uv.

2. Montrez que si un complexe $z \in \mathbb{U}$ est de partie réelle positive et de partie imaginaire y, alors $z = e^{i \arcsin y}$.
Montrez que si u est une fonction de $\mathcal{F}_T$ qui vérifie $\|u-1\|_\infty \leq \sqrt{2}$, alors u admet un relèvement f à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

3. Montrez que si f et g sont deux relèvements d'une même fonction $u \in \mathcal{F}_T$, alors $f-g$ est une fonction constante, égale à un multiple entier de 2π.

Deuxième partie : degré

Dans cette partie, on admet que toute fonction de $\mathcal{F}_T$ admet un relèvement. Ceci sera justifié en III.

Soit $u \in \mathcal{F}_T$; soit f un relèvement de u et soit a un réel. On pose

$$d_T(u) = \frac{1}{2\pi}\Big(f(a+T) - f(a)\Big) \tag{1.1}$$

et on appelle ce nombre le *degré* de u.

4. Soit $u \in \mathcal{F}_T$. Montrez que $d_T(u)$ est un entier et ne dépend ni du choix du relèvement f, ni de a.

5. Soient $u \in \mathcal{F}_T$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $|d_T(u)| \geq k$. Montrez que pour tout $z_0 \in \mathbb{U}$ et tout réel a l'équation $u(t) = z_0$ admet au moins k solutions distinctes dans l'intervalle $[a, a+T[$.

6. Que vaut $d_T(u)$ si u n'est pas surjective ?

7. Montrez que, pour tous u, v appartenant à $\mathcal{F}_T$, on a $d_T(uv) = d_T(u) + d_T(v)$ et $d_T(u/v) = d_T(u) - d_T(v)$.

8. Montrez que, si u, v appartiennent à $\mathcal{F}_T$ et si $\|u-v\|_\infty < 2$, alors $d_T(u/v) = 0$, puis $d_T(u) = d_T(v)$.

L'énoncé utilise maintenant des fonctions "continues à plusieurs variables", chapitre dont le souvenir précis s'est peut-être estompé... De nouveau, l'essentiel est de savoir qu'on peut additionner, composer, multiplier des fonctions continues quand ça a un sens. Rien d'autre n'est requis et on se contentera d'admettre et d'utiliser une conséquence de la continuité.

• On appelle *homotopie* entre $u \in \mathcal{F}_T$ et $v \in \mathcal{F}_T$ une application *continue*

$$\begin{array}{rcccl} \phi & : & [0,1]\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ & & (\lambda, t) & \longmapsto & \phi(\lambda, t) \quad \text{qu'on notera } \phi(\lambda,t) = \phi_\lambda(t) \end{array}$$

vérifiant $\phi_0 = u$, $\phi_1 = v$ et

$$(i) \qquad \forall \lambda \in [0,1], \phi_\lambda \in \mathcal{F}_T$$

On admet qu'on a alors également la propriété

$$(ii) \qquad \forall \lambda_0 \in [0,1], \lim_{\lambda \to \lambda_0} \|\phi_\lambda - \phi_{\lambda_0}\|_\infty = 0.$$

S'il existe une telle homotopie, on dit que les élément u et v de $\mathcal{F}_T$ sont homotopes.

9. Montrez que si ϕ est une homotopie entre $u \in \mathcal{F}_T$ et $v \in \mathcal{F}_T$, alors $d_T(u) = d_T(v)$.
Vous ne voyez pas de suite pourquoi c'est vrai ? Commencez par traduire les choses, et tâchez de trouver des éléments pour expliquer pourquoi c'est vraisemblable... la formalisation suivra.

10. Montrez que pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, l'application M_z définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$M_z(t) = \frac{z - e^{it}}{1 - \overline{z}e^{it}}$$

appartient à $\mathcal{F}_{2\pi}$
Par les théorèmes d'opération, $(\lambda, t) \mapsto M_{\lambda z}(t)$ est continue sur $[0,1]\times\mathbb{R}$. Montrer que $d_{2\pi}(M_z) = 1$.

11. Montrez que si $u \in \mathcal{F}_T$ et $d_T(u) = 0$, alors u est homotope à l'application constante égale à 1.

12. Montrez que u et v, éléments de $\mathcal{F}_T$, sont homotopes si et seulement si $d_T(u) = d_T(v)$.

Troisième partie : cas des fonctions $\mathcal{C}^1$

13. a. Soit $u \in \mathcal{F}_T^1$. On suppose qu'il existe un relèvement f de u, et on le suppose de plus dérivable. Montrez que $f' = -i\overline{u}u'$. Que dire de $f(0)$?

b. Montrez que, réciproquement, pour tout $u \in \mathcal{F}_T^1$, il existe un relèvement f de u qui est de classe $\mathcal{C}^1$ (on considérera une primitive convenable de $-i\overline{u}u'$).

c. Montrez que si $u \in \mathcal{F}_T^1$ et si f est un relèvement de u, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$.

14. Pour cette question on admet le théorème de densité suivant (Weierstrass) : pour toute fonction u continue, T-périodique, il existe une fonction k, T-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\|u-k\|_\infty \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ (le théorème marcherait avec un $\varepsilon > 0$ quelconque). On fixe un tel k.
Montrez que k ne s'annule pas et que $v = \frac{k}{|k|}$ vérifie $\|v-k\|_\infty \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\|\frac{u}{v} - 1\|_\infty \leq \sqrt{2}$.
Déduisez-en que tout $u \in \mathcal{F}_T$ admet un relèvement.

15. *Question sympathique qui n'a sans doute pas été résolue très souvent : tous vos éléments de réflexion m'intéressent.*

Soit $u \in \mathcal{F}_T^1$ et soit f un relèvement de u. Soient $z \in \mathbb{U}$ et

$$F = \Big\{ t \in [a, a+T[, u(t) = z \Big\}.$$

Montrez que si F est fini et si pour tout $t \in F$ on a $f'(t) \neq 0$, alors $d_T(u) = p - q$, où $p = \mathrm{Card}\{t \in F, f'(t) > 0\}$ et $q = \mathrm{Card}\{t \in F, f'(t) < 0\}$.
Indication : sur une question de ce type la mise en forme et l'intuition progressent de concert et s'éclairent mutuellement. Ainsi il est important de nommer les éléments de F puisqu'ils sont en nombre fini : $t_1 < \cdots < t_n$, de faire des dessins pour comprendre ce qui se passe de précis pour f aux points t_i d'une part et entre les points t_i d'autre part, puis de prouver scrupuleusement que chacune de ces intuitions est effectivement vraie. La difficulté, une fois qu'on a compris l'idée, est de bien continuer à réaliser tous les faits qu'il faut empiler pour avoir une preuve complète, de ne pas en considérer un comme évident.

Embryon de quatrième partie
Indice de rotation d'un lacet

On note $\mathcal{A}_T$ l'ensemble des arcs paramétrés plans (assimilés à des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$) de classe $\mathcal{C}^2$, T-périodiques et réguliers, c'est-à-dire dont la dérivée n'est jamais nulle.
Si $U \in \mathcal{A}_T$, on peut définir l'application tangente $\mathcal{T}_U(t) = \dfrac{U'(t)}{|U'(t)|}$.
On appellera indice de U l'entier $i_T(U) = d_T(\mathcal{T}_U)$.

16. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Calculer $i_{2\pi}(U_n)$ pour $U_n : t \mapsto e^{int}$.

17. On pose $U(t) = \cos t + i\sin(2t)$. Montrer que $\mathcal{T}_U(t)$ ne prend jamais la valeur $-i$. Que vaut $i_{2\pi}(U)$?

L'énoncé originel se concluait en montrant (en une dizaine de questions pour construire une homotopie convenable) que l'indice d'une courbe $u \in \mathcal{A}_T$, sans point double, vaut ± 1.