CX8611

Banque commune **École Polytechnique – ENS de Cachan**

PSI

Session 2008

Épreuve de MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé

L'usage de toute calculatrice est interdit

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être un erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

INDICE DE ROTATION D'UNE COURBE SIMPLE.

Dans tout ce problème, T désigne un réel strictement positif.

1 Première partie

On note $\mathbf{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. On note $\mathcal{F}_T$ l'ensemble des applications T-périodiques et continues de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{U}$ et $\mathcal{F}_T^1$ l'ensemble des applications T-périodiques de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{U}$. On appelle *relèvement* de $u \in \mathcal{F}_T$ une fonction continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $u = e^{if}$.

1. Montrez que si $u \in \mathcal{F}_T^1$, et si f est un relèvement de u que l'on suppose de plus dérivable, alors $f' = -i\bar{u}u'$.
Montrez que, réciproquement, tout $u \in \mathcal{F}_T^1$ admet un relèvement f qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et qui est une primitive de $-i\bar{u}u'$.

2. Montrez que si f est un relèvement de u et g est un relèvement de v, alors $f + g$ est un relèvement de uv.

3. Montrez que si $z \in \mathbf{U}$ est de partie réelle positive, alors $z = e^{i \operatorname{Arcsin} y}$, où y est la partie imaginaire de z, puis que si $u \in \mathcal{F}_T$ vérifie $\|u - 1\|_\infty \leq \sqrt{2}$, alors u admet un relèvement f à valeurs dans $[-\pi/2, \pi/2]$.

4. Montrez que pour tout $u \in \mathcal{F}_T$, il existe $w \in \mathcal{F}_T^1$ tel que $\|u-w\|_\infty \leq \sqrt{2}/2$. Montrez que w ne s'annule pas et que $v = w/|w|$ vérifie $\|v - w\|_\infty \leq \sqrt{2}/2$ et $\|\frac{u}{v} - 1\|_\infty \leq \sqrt{2}$. Déduisez-en que tout $u \in \mathcal{F}_T$ admet un relèvement.

5. Montrez que si f et g sont deux relèvements d'un même $u \in \mathcal{F}_T$, alors $f-g$ est une fonction constante, égale à un multiple entier de 2π. Déduisez-en que si $u \in \mathcal{F}_T^1$ et si f est un relèvement de u, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$.

2 Deuxième partie

6. Soit $u \in \mathcal{F}_T$, soit f un relèvement de u et soit a un réel. On pose

$$d_T(u) = \frac{1}{2\pi}\left(f(a+T) - f(a)\right) \tag{1}$$

et on appelle ce nombre le *degré* de u. Montrez que $d_T(u)$ est un entier et ne dépend ni du choix du relèvement f, ni de a.

7. Soient $u \in \mathcal{F}_T$ et $k \in \mathbf{N}$ tels que $|d_T(u)| \geq k$. Montrez que pour tout $z_0 \in \mathbf{U}$ et tout réel a l'équation $u(t) = z_0$ admet au moins k solutions distinctes dans l'intervalle $[a, a+T[$.

8. Que vaut $d_T(u)$ si u n'est pas surjective ?

9. Montrez que pour tous $u, v \in \mathcal{F}_T$ on a $d_T(uv) = d_T(u) + d_T(v)$ et $d_T(u/v) = d_T(u) - d_T(v)$.

10. Montrez que si $u, v \in \mathcal{F}_T$ et si $\|u - v\|_\infty < 2$, alors $d_T(u/v) = 0$, puis que $d_T(u) = d_T(v)$.

11. Montrez que si $u \in \mathcal{F}_T$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors pour tout réel a on a

$$d_T(u) = -\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+T} iu'(t)\bar{u}(t)\,dt.$$

12. Montrez que si $u \in \mathcal{F}_{2\pi}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors

$$d_{2\pi}(u) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} n|c_n|^2,$$

où $(c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ désignent les coefficients de Fourier de u.

13. Soit $u \in \mathcal{F}_T^1$ et soit f un relèvement de u. Soit $z \in \mathbf{U}$ et

$$F = \{t \in [a, a+T[\mid u(t) = z\}.$$

Montrez que si F est fini et si pour tout $t \in F$ on a $f'(t) \neq 0$, alors $d_T(u) = p - q$, où $p = \mathrm{Card}\{t \in F \mid f'(t) > 0\}$ et $q = \mathrm{Card}\{t \in F \mid f'(t) < 0\}$.

3 Troisième partie

On appelle *homotopie* entre $u \in \mathcal{F}_T$ et $v \in \mathcal{F}_T$ une application continue

$$\begin{aligned}\varphi : [0,1] \times \mathbf{R} &\to \mathbf{U}\\ (\lambda, t) &\mapsto \varphi_\lambda(t)\end{aligned}$$

telle que, $\varphi_0 = u$, $\varphi_1 = v$, et

(i) $\forall s \in [0,1]$, $\varphi_\lambda \in \mathcal{F}_T$, (ii) $\forall \lambda_0 \in [0,1]$, $\lim_{\lambda\to\lambda_0} \|\varphi_\lambda - \varphi_{\lambda_0}\|_\infty = 0$.

S'il existe une homotopie entre u et v, on dit que u est *homotope* à v.

14. Montrez que si φ satisfait la condition (i) ci-dessus et est lipschitzienne sur $[0,1] \times [a, a+T]$, où a est un réel arbitraire, alors la condition (ii) est vérifiée.

15. Montrez que si φ est une homotopie entre $u \in \mathcal{F}_T$ et $v \in \mathcal{F}_T$, alors $d_T(u) = d_T(v)$.

16. Montrez que pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, l'application M_z définie pour $t \in \mathbf{R}$ par

$$M_z(t) = \frac{z - e^{it}}{1 - \bar{z}e^{it}}$$

appartient à $\mathcal{F}_{2\pi}$, puis que $d_{2\pi}(M_z) = 1$. (Indication: on pourra considérer les applications $M_{\lambda z}$, où λ parcourt l'intervalle $[0,1]$.)

17. Montrez que si $u \in \mathcal{F}_T$ et $d_T(u) = 0$, alors u est homotope à l'application constante égale à 1.

18. Montrez que $u, v \in \mathcal{F}_T$ sont homotopes si et seulement si $d_T(u) = d_T(v)$.

4 Quatrième partie

On note $\mathcal{A}_T$ l'ensemble des arcs paramétrés de classe $\mathcal{C}^2$ et T-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$ identifié à $\mathbf{C}$, réguliers à l'ordre 1 en chaque point, c'est-à-dire dont la dérivée ne s'annule pas. On dira que $\Gamma \in \mathcal{A}_T$ est *simple* si la restriction de Γ à $[0, T[$ est injective.

Si $\Gamma \in \mathcal{A}_T$, on appellera *application tangente* de Γ l'application $\overrightarrow{T}_\Gamma \in \mathcal{F}_T$ définie par

$$\overrightarrow{T}_\Gamma(t) = \frac{\Gamma'(t)}{|\Gamma'(t)|},$$

pour $t \in \mathbf{R}$. On appellera *indice* de $\Gamma \in \mathcal{A}_T$ l'entier

$$i_T(\Gamma) = d_T(\overrightarrow{T}_\Gamma).$$

19. Déterminez $i_{2\pi}(\Gamma_n)$, où $n \in \mathbf{Z}$ et $\Gamma_n(t) = e^{int}$.

20. On pose $\Gamma(t) = \cos t + i\sin(2t)$, et on désigne par $\overrightarrow{T}_\Gamma$ son application tangente. Montrez que pour tout réel t on a $\overrightarrow{T}_\Gamma(t) \neq i$, puis que $i_{2\pi}(\Gamma) = 0$.

21. Montrez que si $\Gamma \in \mathcal{A}_T$ est paramétrée par l'abcisse curviligne, alors $2\pi i_T(\Gamma)$ est l'intégrale de la courbure de Γ entre 0 et T.

On suppose à présent que $\Gamma \in \mathcal{A}_T$ *et que de plus* Γ *est simple. Pour tous* $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ *tels que* $(x-y)/T \notin \mathbf{Z}$*, on pose*

$$S_\Gamma(x,y) = \frac{\Gamma(x) - \Gamma(y)}{\sin\left(\frac{\pi}{T}(x-y)\right)},$$

et pour tout $y \in \mathbf{R}$ et tout $k \in \mathbf{Z}$ on pose

$$S_\Gamma(y+kT,y) = (-1)^k \frac{T}{\pi} \Gamma'(y).$$

22. Montrez que l'application S_Γ est bien définie sur $\mathbf{R}^2$, ne s'annule pas, et que pour tous $x, y \in \mathbf{R}$ on a $S_\Gamma(x+T,y) = S_\Gamma(x,y+T) = -S_\Gamma(x,y)$ et $S_\Gamma(x,y) = S_\Gamma(y,x)$.

23. Soit $U = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x-y| < T\}$. Montrez que la fonction F définie pour $(x,y) \in U$, $x \neq y$ par $F(x,y) = \frac{x-y}{\sin\left(\frac{\pi}{T}(x-y)\right)}$ se prolonge par continuité sur U en une fonction de classe C^1.

24. En écrivant $\Gamma(x)-\Gamma(y)$ comme un reste intégral, montrez que la fonction définie pour $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $x \neq y$ par $G(x,y) = \frac{\Gamma(x)-\Gamma(y)}{x-y}$ se prolonge par continuité en une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$.

25. Montrez que S_Γ est de classe C^1 sur l'ouvert U défini à la question 23, puis sur $\mathbf{R}^2$. Montrez que S_Γ est lipschitzienne sur $\mathbf{R}^2$.

26. Montrez qu'il existe un réel a tel que $\mathrm{Re}(\Gamma(a)) = \min_{t\in\mathbf{R}} \mathrm{Re}(\Gamma(t))$, et que pour un tel a le nombre complexe $S_\Gamma(a,a)$ est imaginaire pur. **On supposera dans la suite de cette partie que $\mathbf{a = 0}$ convient.**

27. Soit $P_0 : [0,T] \to \mathbf{R}^2$ l'application définie par

$$P_0(t) = (\max(0, 2t-T), \min(T, 2t)).$$

Soit u_0 l'application T-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{U}$ dont la restriction à $[0,T[$ est $\frac{S_\Gamma \circ P_0}{|S_\Gamma \circ P_0|}$.

Montrez que $u_0(T) = \frac{S_\Gamma \circ P_0(T)}{|S_\Gamma \circ P_0(T)|}$ et que $u_0 \in \mathcal{F}_T$.

28. Montrez $u_0(0) \in \{-i, i\}$, que la partie réelle de u_0 est positive sur $[0, T/2]$ et que pour tout $t \in [0, T/2]$ on a $u_0(t+T/2) = -u_0(t)$.

29. Déduisez de ce qui précède que la fonction $f : [0,T] \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \mathrm{Arcsin}(\mathrm{Im}(u_0(t)) & \text{si } t \in [0, T/2[, \\ 2\,\mathrm{Arcsin}(\mathrm{Im}(u_0(T/2)) - \mathrm{Arcsin}(\mathrm{Im}(u_0(t)) & \text{si } t \in [T/2, T] \end{cases}$$

est un relèvement de u_0 sur l'intervalle $[0,T]$. Montrez que $f(T) - f(0) = 2f(T/2) - 2f(0)$, puis que $d_T(u_0) \in \{-1, +1\}$.

30. Pour tout $t \in [0,T]$ on pose $P_1(t) = (t,t)$, et pour tout $\lambda \in [0,1]$ on pose $P_\lambda = \lambda P_1 + (1-\lambda)P_0$. Montrez que l'application $X(\lambda, t) = P_\lambda(t)$ est lipschitzienne sur $[0,1] \times [0,T]$.

Soit φ_λ l'application T-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{U}$ dont la restriction à $[0,T[$ est $\frac{S_\Gamma \circ P_\lambda}{|S_\Gamma \circ P_\lambda|}$. Montrez que φ_λ définit une homotopie entre u_0 et l'application tangente de Γ, et que $i_T(\Gamma) \in \{-1, +1\}$.

Fin de l'épreuve