PSI* 2017/18 - DL3 version 1 - Calculs de valeurs approchées, accélération de convergence

Préambule

Le but général du problème est d'étudier différentes méthodes d'approximation de deux réels particuliers, $\ln 2$ d'une part et la constante d'Euler γ d'autre part. Les différentes parties sont indépendantes, sauf la question 1.1. qui est utilisée plusieurs fois.

Partie 1

1.1. En appliquant une formule de Taylor à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ définie pour $x > -1$, montrer que

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \qquad (\diamond).$$

1.2. A partir de la formule $(\diamond)$, donner une première méthode d'approximation permettant d'obtenir $\ln 2$ avec une précision $\varepsilon > 0$ donnée.

1.3. On définit la suite de terme général u_n pour $n \geq 1$ par la relation $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0, 1]$.

1.4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone et convergente.

• Dans toute la suite de ce problème, on définit un réel noté γ et appelé constante d'Euler, par la relation :

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) \qquad (\dagger).$$

1.5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, n \leq x \leq n+1, \frac{1}{n+1} \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}.$$

Représenter graphiquement D_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, i, j) et montrer que l'aire de D_n est égale à $u_n - u_{n+1}$.

1.6. Expliquer graphiquement pourquoi l'aire de D_n est comprise entre $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$ et $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.
Exceptionnellement, on ne demande pas de preuve, juste de donner une interprétation graphique.

1.7. On admet que les inégalités de 1.6. sont vraies. En déduire l'encadrement suivant de la constante d'Euler, valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n - \frac{1}{2n} \leq \gamma \leq u_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n(n+1)}.$$

1.8. Décrire une première méthode d'approximation permettant d'obtenir γ avec une précision $\varepsilon > 0$ donnée. On supposera connue une approximation de la fonction logarithme avec une précision arbitraire.

Partie 2

Dans cette partie, $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ désigne une suite réelle convergeant vers 0. Cette suite est supposée de plus décroissante à partir de la question 2.4.

2.1. Soit $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels que la série de terme général λ_k diverge vers $+\infty$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k a_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k} = 0.$$

2.2. Pour une suite $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ quelconque, on note Δu la suite dont les composantes sont données par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad (\Delta u)_k = u_k - u_{k+1}.$$

On définit ainsi une application linéaire Δ qui à la suite u associe la suite Δu. On note Δ^n la puissance itérée n-ième de l'opérateur Δ :

$$\Delta^0 = \mathrm{Id} \qquad \text{et} \qquad \Delta^{n+1} = \Delta \circ \Delta^n.$$

Montrer que, pour tous k et n dans $\mathbb{N}$, on a

$$(\Delta^n u)_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} u_{k+i}.$$

2.3. Montrer, à n fixé dans $\mathbb{N}$, que $\lim\limits_{k\to+\infty} (\Delta^n a)_k = 0$, et, à k fixé dans $\mathbb{N}$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(\Delta^n a)_k}{2^n} = 0$.

2.4. On suppose à partir de maintenant que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente vers 0. On note S la somme de la série alternée de terme général $(-1)^k a_k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

On définit pour tous k et n dans $\mathbb{N}$:

$$a_n^{(k)} = (-1)^k \left[\frac{(\Delta^n a)_k}{2^n} - \frac{(\Delta^{n+1} a)_k}{2^{n+1}} \right].$$

Montrer, à k fixé dans $\mathbb{N}$, que la série de terme général $(a_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente avec pour somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(k)} = (-1)^k a_k$$

et, à n fixé dans $\mathbb{N}$, que la série de terme général $(a_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente avec pour somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_n^{(k)} = \frac{(\Delta^n a)_0}{2^{n+1}}.$$

2.5. On note $r_m^{(k)} = \sum\limits_{n=m}^{+\infty} a_n^{(k)}$. Montrer que la série de terme général $(r_m^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note R_m sa somme.

Indication : on pourra faire d'abord les cas $m = 1, m = 2$ pour se donner une idée.

2.6. Montrer que $\lim\limits_{m\to+\infty} R_m = 0$ et $\sum\limits_{m=0}^{n} \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} = R_0 - R_{n+1}$.

2.7. En déduire que la série de terme général $\left(\frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est convergente et a pour somme S.

2.8. On suppose en outre que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ peut s'écrire sous la forme $a_k = f(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, où f est une fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad (-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0.$$

Montrer que, dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $(\Delta^n a)_k \geq 0$. En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} \leq \frac{a_0}{2^{m+1}}.$$

2.9. En appliquant les résultats de cette partie à la suite de terme général $a_k = \frac{1}{k+1}$, proposer une méthode d'approximation de $\ln 2$ avec une précision $\varepsilon > 0$ donnée.

Partie 3

Dans toute cette partie, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ désigne une suite réelle pouvant s'écrire pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$b_k = \int_0^1 x^k w(x)\,\mathrm{d}x$$

où w est une fonction réelle continue sur $[0,1]$, et positive.

3.1. Montrer que la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

3.2. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles telle que pour tout $x\in\mathbb{R}, P_0(x)=1$, $P_1(x)=1-2x$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}^*, \qquad P_{n+1}(x)=2(1-2x)P_n(x)-P_{n-1}(x)$$

Montrer que P_n est un polynôme de degré n et établir une relation entre P_n et la fonction T_n définie sur $[-1,1]$ par l'expression

$$\forall x\in[-1,1], \qquad T_n(x)=\cos(n\arccos x)$$

Indication : on pourra essayer d'établir une relation de récurrence linéaire à deux termes sur les fonctions T_n du même type que celle portant sur les fonctions P_n.

3.3. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$P_n(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{n}{n+m}\binom{n+m}{2m}2^{2m}x^m \text{ bon admettez cela, récurrence lourdingue...}$$

En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}, P_n(-1)\neq 0$.

3.4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit le polynôme Q_n tel que $Q_n(X)=\frac{P_n(-1)-P_n(x)}{(1+x)P_n(-1)}$ et on note $s(n)=\int_0^1 Q_n(x)w(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que

$$s(n)=\frac{\sum_{k=0}^{n}c_{n,k}(-1)^k b_k}{P_n(-1)} \qquad \text{avec} \qquad c_{n,k}=\sum_{m=k+1}^{n}\frac{n}{n+m}\binom{n+m}{2m}2^{2m}$$

3.5. Calculer $P_n(-1)$. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$|s(n)-S|\leq\frac{2S}{(3+\sqrt{8})^n}$$

où S désigne la somme de la série alternée de terme général $(-1)^k b_k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

3.6. Soit $n\geq 2$. On suppose connus les n premiers termes de la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}b$. On se propose d'étudier l'algorithme suivant

```
d0=1
d1=3
for k in range(n-1):
    tmp=d1
    d1=6*d1-d0
    d0=tmp
b=-1
c=-d1
s=0
for k in range(n):
    c=b-c
    s=s+c*bk
    b=b*(k+n)*(k-n)/((k+1/2)*(k+1))
sn=s/d1
```

Quelles valeurs respectives prennent d1 et sn à la fin de l'algorithme ? Justifier la réponse.

3.7. En appliquant les résultats de cette partie à la suite de terme général $b_k=\frac{1}{k+1}$, proposer une méthode d'approximation de $\ln 2$ avec une précision $\varepsilon>0$ donnée.