MATHÉMATIQUES

DURÉE: 4 HEURES

Aucun document n'est autorisé

L'usage de toute calculatrice est interdit

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet comporte 7 pages

PRÉAMBULE

Le but général de ce problème est d'étudier différentes méthodes d'approximation de deux réels particuliers, $\ln 2$ d'une part et la constante d'Euler γ d'autre part. La définition de ces deux réels sous forme de limites de suites et les premiers encadrements associés sont étudiés dans la partie I. Une autre méthode d'approximation de la constante d'Euler à l'aide d'une expression de celle-ci sous forme d'intégrale est proposée dans la partie II. La partie III consiste à exprimer γ à partir de la somme d'une certaine série alternée. Les parties IV et V proposent ensuite deux méthodes générales d'accélération de convergence pour le calcul des sommes de séries alternées et les appliquent à l'approximation de $\ln 2$. Les cinq parties sont assez largement indépendantes.

Dans tout le problème, on note pour tout $s > 0$, $\zeta_a(s)$ la somme de la série alternée de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ pour $n \geq 1$ et pour tout $s > 1$, $\zeta(s)$ la somme de la série de terme général $\dfrac{1}{n^s}$ pour $n \geq 1$.

PREMIÈRE PARTIE

1.1 En appliquant une formule de Taylor à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ définie pour $x > -1$, montrer que

$$\ln 2 = \zeta_a(1) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}. \tag{1}$$

1.2 En déduire une première méthode d'approximation permettant d'obtenir $\ln 2$ avec une précision $\epsilon > 0$ donnée.

1.3 On définit la suite de terme général u_n pour $n \geq 1$ par la relation:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n \in [0,1]$.

1.4 Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est monotone. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est convergente.

Dans toute la suite de ce problème, on définit un réel, noté γ et appelé constante d'Euler, par la relation:

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right). \tag{2}$$

1.5 Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note D_n le domaine de $\mathbf{R}^2$ défini par:

$$D_n = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad n \leq x \leq n+1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n+1} \leq y \leq \frac{1}{x}\}.$$

Représenter graphiquement D_n dans le plan muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ et montrer que l'aire de D_n est égale à $u_n - u_{n+1}$.

1.6 Montrer que l'aire de D_n est comprise entre $\frac{1}{2}(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})$ et $\frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$.

1.7 En déduire l'encadrement suivant de la constante d'Euler valable pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$u_n - \frac{1}{2n} \leq \gamma \leq u_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n(n+1)}.$$

1.8 Décrire une première méthode d'approximation permettant d'obtenir γ avec une précision $\epsilon > 0$ donnée. On supposera connue une approximation de la fonction logarithme avec une précision arbitraire.

Deuxième partie

2.1 Soit $a > 0$. Montrer que la fonction réelle f_a définie sur $]a, +\infty[$ et telle que $f_a(x) = (1 - \frac{a}{x})^x$ est croissante et vérifie $\lim_{x \to +\infty} f_a(x) = e^{-a}$.

2.2 Montrer que les intégrales $I_n = \int_0^n f_t(n) \ln t dt$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $I = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt$ sont correctement définies.

2.3 Montrer que $\lim_{n \to +\infty} I_n = I$.

2.4 Etablir l'expression suivante de I_n:

$$I_n = \frac{n}{n+1}\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right).$$

En déduire que la constante d'Euler γ définie par la relation (2) peut aussi s'exprimer sous la forme d'une intégrale:

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt. \tag{3}$$

2.5 Montrer qu'on peut définir deux fonctions F et R sur $\mathbf{R}_+^*$ par les relations suivantes:

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}dt \\ R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt \end{cases}$$

et que ces deux fonctions vérifient pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$:

$$\gamma = F(x) - \ln x - R(x)$$

2.6 Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{nn!}$.

2.7 Etablir les inégalités suivantes valables pour tout $x \in \mathbf{R}_*^+$ et tout entier $N > x$:

$$\begin{cases} |F(x) - \displaystyle\sum_{n=1}^{N-1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{nn!}| \leq \frac{1}{eN}(\frac{ex}{N})^N \\ 0 \leq R(x) \leq \dfrac{e^{-x}}{x} \end{cases}$$

2.8 Proposer une méthode permettant de déterminer, à $\epsilon > 0$ fixé, une valeur de $x > 0$ et une valeur de $N \in \mathbf{N}^*$ de telle sorte qu'on ait:

$$|\sum_{n=1}^{N-1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{nn!} - \ln x - \gamma| \leq \epsilon$$

TROISIÈME PARTIE

3.1 Montrer que la fonction ζ_a définie dans le préambule est une fonction continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

3.2 Montrer que ζ_a est une fonction dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et exprimer sa dérivée sous forme de série.

3.3 Vérifier que pour tout $s > 1$, on a $\zeta_a(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$ où la fonction ζ a été définie dans le préambule.

3.4 En remarquant que $\dfrac{1}{n^s} = s\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^{s+1}}dt$ pour tout $s > 0$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, établir que

$$\zeta(s) = s\int_1^{+\infty} \frac{E(t)}{t^{s+1}}dt$$

où $E(t)$ représente la partie entière du réel t.

3.5 Montrer qu'au voisinage de $s = 1$ par valeurs supérieures, on a

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$$

où γ désigne la constante d'Euler définie par la relation (2).

3.6 Vérifier que la série de terme général $(-1)^n \dfrac{\ln(n+3)}{n+3}$ pour $n \in \mathbf{N}$ est une série alternée. En notant S sa somme, montrer à l'aide des questions précédentes que

$$\gamma = \frac{\ln(2)+1}{2} - \frac{1}{\ln(2)}S \tag{4}$$

Quatrième partie

Dans toute cette partie, $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ désigne une suite réelle convergente vers 0. Cette suite est supposée de plus décroissante à partir de la question 4.4.

4.1 Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle la série de terme général λ_k diverge vers $+\infty$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k} = 0$$

4.2 On définit Δ l'opérateur opérant sur une suite quelconque $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ par la relation:

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad (\Delta u)_k = u_k - u_{k+1}$$

puis on note Δ^n la puissance itérée n-ième de l'opérateur Δ:

$$\Delta^0 = \mathrm{Id} \text{ et pour tout } n \in \mathbf{N},\ \Delta^{n+1} = \Delta \circ \Delta^n$$

Montrer que pour tous k et n dans $\mathbf{N}$, on a

$$(\Delta^n u)_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} u_{k+i}$$

4.3 Montrer, à n fixé dans $\mathbf{N}$, que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} (\Delta^n a)_k = 0$ et, à k fixé dans $\mathbf{N}$, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\Delta^n a)_k}{2^n} = 0$.

4.4 On suppose à partir de maintenant que la suite $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est décroissante et convergente vers 0. On note S la somme de la série alternée de terme général $(-1)^k a_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

On definit pour tous k et n dans $\mathbf{N}$:

$$a_n^{(k)} = (-1)^k \left[\frac{(\Delta^n a)_k}{2^n} - \frac{(\Delta^{n+1} a)_k}{2^{n+1}}\right]$$

Montrer,à k fixé dans $\mathbf{N}$, que la série de terme général $(a_n^{(k)})_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente avec pour somme:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(k)} = (-1)^k a_k$$

et, à n fixé dans $\mathbf{N}$, que la série de terme général $(a_n^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ est convergente avec pour somme:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_n^{(k)} = \frac{(\Delta^n a)_0}{2^{n+1}}.$$

4.5 On note $r_m^{(k)} = \sum_{n=m}^{+\infty} a_n^{(k)}$. Montrer que la série de terme général $(r_m^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ est convergente. On note R_m sa somme.

4.6 Montrer que $\lim_{m\to+\infty} R_m = 0$ et $\sum_{m=0}^{n} \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} = R_0 - R_{n+1}$.

4.7 En déduire que la série de terme général $\left(\frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}}\right)_{m\in\mathbf{N}}$ est convergente et a pour somme S.

4.8 On suppose en outre que la suite $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ peut s'écrire sous la forme $a_k = f(k)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ où f est une fonction appartenant à $C^\infty(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$ et telle que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in \mathbf{R}_+, \quad (-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$$

Montrer dans ce cas que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $k \in \mathbf{N}$, $(\Delta^n a)_k \geq 0$. En déduire que pour tout $m \in \mathbf{N}$,

$$0 \leq \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} \leq \frac{a_0}{2^{m+1}}.$$

4.9 En appliquant les résultats de cette partie à la suite de terme général $a_k = \frac{1}{k+1}$, proposer une méthode d'approximation de $\ln 2$ avec une précision $\epsilon > 0$ donnée. Quelle expression de $\ln 2$ retrouve t-on?

Cinquième partie

Dans toute cette partie, $(b_k)_{k\in\mathbf{N}}$ désigne une suite réelle pouvant s'écrire pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$b_k = \int_0^1 x^k w(x)dx$$

où w est une fonction réelle continue sur $]0,1[$, positive et dont l'intégrale sur $]0,1[$ est convergente.

5.1 Montrer que la suite $(b_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est décroissante et convergente vers 0.

5.2 Soit $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions réelles telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 1 - 2x$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad P_{n+1}(x) = 2(1-2x)P_n(x) - P_{n-1}(x).$$

Montrer que P_n est un polynôme de degré n et établir une relation entre P_n et la fonction T_n définie sur $[-1,1]$ par l'expression:

$$\forall x \in [-1,1], \quad T_n(x) = \cos(n\mathrm{Arccos}(x)).$$

Indication: on pourra essayer d'établir une relation de récurrence linéaire à deux termes sur les fonctions T_n du même type que celle portant sur les fonctions P_n.

5.3 Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{n}{n+m} \binom{n+m}{2m} 2^{2m} x^m.$$

En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_n(-1) \neq 0$.

5.4 Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit le polynôme Q_n tel que $Q_n(X) = \dfrac{P_n(-1) - P_n(x)}{P_n(-1)(1+x)}$ et on note $s(n) = \displaystyle\int_0^1 Q_n(x)w(x)dx$. Montrer que

$$s(n) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_{n,k}(-1)^k b_k}{P_n(-1)}$$

avec

$$c_{n,k} = \sum_{m=k+1}^{n} \frac{n}{n+m} \binom{n+m}{2m} 2^{2m}$$

5.5 Calculer $P_n(-1)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$|s(n) - S| \leq \frac{2S}{(3+\sqrt{8})^n}$$

où S désigne la somme de la série alternée de terme général $(-1)^k b_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

5.6 Soit $n \geq 2$. On suppose connus les n premiers termes de la suite $(b_k)_{k\in\mathbf{N}}$. On se propose d'étudier l'algorithme suivant, écrit ici de manière pseudo-informatique:

```
. d0 = 1, d1 = 3;
. Pour k allant de 0 à n − 2, faire:
.     tmp = d1, d1 = 6 * d1 − d0, d0 = tmp;
. fin;
. b = −1, c = −d1, s = 0;
. Pour k allant de 0 à n − 1, faire:
.     c = b − c, s = s + c * b_k;
.     b = b * (k + n) * (k − n)/((k + 1/2) * (k + 1));
. fin;
. sn = s/d1;
```

Quelles valeurs respectives prennent $d1$ et sn à la fin de l'algorithme? Justifier la réponse.

5.7 En appliquant les résultats de cette partie à la suite de terme général $b_k = \dfrac{1}{k+1}$, proposer une méthode d'approximation de $\ln 2$ avec une précision $\epsilon > 0$ donnée.