PSI* 2024/25 DL 3

Etude de suites récurrentes linéaires à coefficients variables

Travail demandé pour mercredi 3/10 : minimum prélim + Parties I, IIAB, III. Standard I,II, III ; ou bien tout of course.

Étant donnée une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on associe à tout couple (u_0, u_1) de nombres réels la suite réelle (u_n) définie à partir de ces deux valeurs initiales u_0 et u_1 par la relation $(\mathfrak{R})$:

$$u_{n+1} = u_n + a_{n-1}u_{n-1} \text{ où } n \geq 1$$

Préliminaires

P1) Prouver, pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq 1 + x$.

• Dans les deux question suivantes on considère deux suites numériques (α_n) et (β_n)

P2) Rappeler la définition des relations $\alpha_n = o(\beta_n)$, $\alpha_n \sim \beta_n$.

P3) On suppose $\alpha_n \sim \beta_n$, que la série $\sum \beta_n$ est à termes positifs et qu'elle converge. Montrer la relation

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n \underset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \beta_n.$$

On pourra faire usage de ce résultat dans la suite, en le citant expressément.

Partie I - Premiers résultats et exemples

I.A - Prouver que l'ensemble $\mathcal{R}$ des suites qui vérifient la relation $(\mathfrak{R})$ est un espace vectoriel de dimension 2.

I.B - On suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante : pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n = a_0$.

I.B.1) Dans le cas $a_0 = -\frac{1}{4}$, donner une base de l'espace vectoriel $\mathcal{R}$.

I.B.2) A quelle condition portant sur a_0 peut-on dire que l'espace vectoriel $\mathcal{R}$ est inclus dans l'espace vectoriel des suites de limite nulle ?

Partie II - Étude de la convergence de la suite (u_n)

II.A - On suppose dans la sous partie II.A que la suite (a_n) est à termes positifs et que $u_0 \geq 0$ et $u_1 > 0$.

II.A.1) Étudier, pour $n \geq 1$, le sens de variation de la suite (u_n).

II.A.2) Établir, pour $n \geq 2$, l'inégalité $u_{n+1} \leq u_n \exp(a_{n-1})$.
En déduire que si la série Σa_n converge, alors la suite (u_n) converge aussi.

II.A.3) Établir réciproquement que si la suite (u_n) converge, alors la série Σa_n est convergente.

II.B - Dans la sous partie II.B, on suppose la série Σa_n absolument convergente et l'on considère la suite (v_n) définie par $v_0 = |u_0|$, $v_1 = |u_1|$ et, pour $n \geq 1$, $v_{n+1} = v_n + |a_{n-1}|\, v_{n-1}$.

II.B.1) Comparer $|u_n|$ et v_n pour la relation d'ordre $\leq$.

II.B.2) Étudier la convergence absolue de la série $\Sigma(u_{n+1} - u_n)$ et la convergence de la suite (u_n).

II.C - On suppose dans la question II.C que $a_n = a^n$, a étant un réel de l'intervalle $]0, 1[$, et que la limite L de la suite (u_n) est non nulle. Déterminer un équivalent de $u_{k+1} - u_k$ et en déduire un équivalent de $L - u_n$ en interprétant $L - u_n$ comme reste d'ordre n d'une certaine série.

II.D - On suppose dans la sous partie II.D que

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

et que la limite L de la suite (u_n) est non nulle.

II.D.1) Prouver que $u_{k+1} - u_k$ est équivalent à

$$L \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

et en déduire que $L - u_n$ est équivalent à $\dfrac{L}{n}$.

II.D.2) On définit la suite (ε_n), en posant pour $n \geq 1$

$$u_n = L - \frac{L}{n} + \varepsilon_n$$

Déterminer de même un équivalent de $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$, puis de ε_n,
et en déduire le développement limité à l'ordre 2 de u_n par rapport à $\dfrac{1}{n}$.

Partie III - Étude des suites (u_n) de limite nulle

Dans toute cette partie, on suppose les a_n strictement positifs pour tout entier naturel n et la série Σa_n convergente. Toute suite (u_n) de premiers termes u_0 et u_1, et définie par la relation $(\mathfrak{R})$ est donc convergente . On note $L(u_0, u_1)$ sa limite.

III.A - Montrer que l'application

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (u_0, u_1) \mapsto L(u_0, u_1)$$

est linéaire.

- Dans toute la suite de cette partie III, on supposera le couple (u_0, u_1) distinct du couple $(0, 0)$.

III.B -

III.B.1) Montrer que s'il existe un indice $m \in \mathbb{N}$ tel que $u_m.u_{m+1} > 0$, alors la limite $L(u_0, u_1)$ de la suite (u_n) est non nulle.

III.B.2) Montrer que s'il existe un indice $m \in \mathbb{N}$ tel que $u_m = 0$, alors la limite $L(u_0, u_1)$ est non nulle.

III.B.3) On note N le noyau de l'application linéaire L. Déterminer la dimension du sous-espace N.

III.C - On dira que la suite (u_n) est alternée si $u_n u_{n+1} < 0$ pour tout indice n.

III.C.1) Montrer que le couple de réels (u_0, u_1) est dans N si et seulement si la suite (u_n) de premiers termes u_0 et u_1 est alternée.

III.C.2) Le rapport $r_0 = -\dfrac{u_1}{u_0}$ dépend-t-il de l'élément (u_0, u_1) choisi dans $N\backslash\{0, 0\}$?

III.D - On suppose dans cette question que le couple (u_0, u_1) appartient à N, donc que la suite (u_n) est alternée. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$r_n = -\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

III.D.1) Prouver que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$r_n = -1 + \frac{a_{n-1}}{r_{n-1}} \text{ et } 0 < r_n < a_n$$

III.D.2) En déduire que la suite (r_n) converge vers une limite que l'on précisera.

III.D.3) Étudier enfin la convergence des séries Σr_n, Σu_n et $\Sigma\,|u_n|$.

Partie IV - Étude du noyau N de l'application L

Dans toute cette partie, on suppose les a_n strictement, positifs pour tout indice n et la série Σa_n convergente. Pour tout entier naturel n, on considère les fonctions

$$f_n : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[\qquad x \mapsto f_n(x) = \frac{a_n}{1+x}$$
$$g_n = f_0 \circ f_1 \circ \cdots \circ f_n$$

On pose $p_n = g_n(0)$.
Par ailleurs r_0 est l'unique réel tel que, pour tout u_1 non nul, le couple $(u_0, -r_0 u_0)$ est élément de N (cf III.D).

IV.A - Établir que f_n et g_n sont monotones, dérivables, et que, pour $x \geq 0$,

$$|g_n'(x)| \leq a_0 a_1 \cdots a_n$$

En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $|p_n - p_{n-1}| \leq a_0 a_1 \cdots a_n$.

IV.B - Montrer que la suite (p_n) est convergente.

IV.C - Établir que, pour tout entier $n \geq 1$, r_0 est compris entre p_{n-1} et p_n. En déduire que r_0 est limite de la suite (p_n).

IV.D - Un réel $\varepsilon > 0$ étant donné, écrire en Python un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée à moins de ε près de r_0. On pourra par exemple supposer que le terme d'ordre n de la suite (a_n) s'obtient en utilisant la syntaxe `a(n)` d'appel à une fonction.

IV.E - Déterminer le nombre r_0 à 10^{-5} près lorsque

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$