PSI* 2024/25 DL 4

Rang 1

Deux sujets proposés (au choix) pour vendredi 11/10
- pour les forts DL4A (c'est un exercice d'un sujet de concours de 3h formé de 3 exos), plus Q1Q2 DL4B
- pour les très forts DL4B (morceau d'un sujet ENS MP/PC), qui ne vous empêche pas de regarder 4A si vous craquez sur 4B :)

4A - Endomorphismes de rang 1

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ sur le corps $\mathbb{C}$. Soit u un endomorphisme de E. Soient B et B' deux bases de E et U et U' les matrices représentatives de u respectivement dans B et dans B'. Montrer que U et U' ont même trace.

• Ainsi les matrices représentatives de u ont toutes la même trace ; cette valeur commune sera notée $\operatorname{Tr} u$ dans la suite.

2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ sur le corps $\mathbb{C}$. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

a. Montrer qu'on a soit $E = \operatorname{Im} u \cap \ker u$, soit $\operatorname{Im} u \subset \ker u$.

b. Soit e un vecteur non nul de $\operatorname{Im} u$. Justifier l'existence d'une base de E dont le premier vecteur est e.

c. Dans le cas où $\operatorname{Im} u \subset \ker u$, quelle est la forme de la matrice de u sur une telle base ? Que vaut $\operatorname{Tr} u$?

d. Montrer que $E = \operatorname{Im} u \oplus \ker u \Leftrightarrow \operatorname{Tr} u \neq 0$.

e. Calculer u^2 en fonction de u, et $\operatorname{Tr} u$ et donner une condition nécessaire et suffisante pour que u soit un projecteur.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note F_A l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), F_A(X) = \operatorname{Tr}(AX)$$

a. Montrer que F_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b. Montrer que l'application $F : A \mapsto F_A$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^* = L(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$.

c. On note $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Exprimer $F_A(E_{ij})$ en fonction des coefficients de A.

d. Montrer que F est un isomorphisme.

4. Soit J une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et f une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'application ψ_f définie par

$$\begin{array}{rccc} \psi_f & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & & X & \longmapsto & f(X)J \end{array}$$

a. Justifier l'existence d'une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f(X) = \operatorname{Tr}(AX)$.

b. Déterminer noyau, image et rang de ψ_f à l'aide de f.

c. Que vaut la trace de ψ_f ? On l'exprimera à l'aide de A et J.

d. A quelle condition ψ_f est-il un projecteur ?

4B - Endomorphismes conservant la propriété "être de rang 1"

Soit n un entier naturel non-nul. On note $\mathcal{M} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel de dimension n^2 des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On note $\mathcal{CC} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel de dimension n des matrices colonne à coefficients dans $\mathbb{C}$, et $\mathcal{L} = \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel de dimension n des matrices ligne. Enfin, on note $\mathcal{R}_1$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}$ constitué des matrices de rang 1.

Si P et Q sont deux éléments du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{C})$, on note $\varphi_{P,Q}$ l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}$ défini, pour $A \in \mathcal{M}$, par

$$\varphi_{P,Q}(A) = PAQ.$$

On note T l'endomorphisme transposition de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire l'endomorphisme de $\mathcal{M}$ défini par $T(A) = A^\top$ pour $A \in \mathcal{M}$. On note alors

$$G = \{\varphi_{P,Q}; P, Q \in GL_n(\mathbb{C})\},$$

$$G' = \{T \circ \varphi_{P,Q}; P, Q \in GL_n(\mathbb{C})\},$$

et

$$\mathcal{G} = G \cup G'.$$

On va montrer que les endomorphismes f de l'espace vectoriel $\mathcal{M}$, tels que $f(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$, sont précisément les éléments de $\mathcal{G}$.

1. Montrer que si $f \in \mathcal{G}$, et si $A \in \mathcal{R}_1$, alors $f(A) \in \mathcal{R}_1$.
2. Montrer que toute matrice de rang 1 est produit d'un élément de $\mathcal{C}$ par un élément de $\mathcal{L}$.
3. Soient $X, X' \in \mathcal{C}$ et $V, V' \in \mathcal{L}$. On suppose que $XV + X'V'$ est de rang $\leq$1, et que V et V' sont linéairement indépendants dans $\mathcal{L}$.
   (a) Montrer qu'il existe $Y, Y' \in \mathcal{C}$, tels que $VY = 1$, $V'Y = 0$, $VY' = 0$ et $V'Y' = 1$.
   (b) En déduire que X et X' sont liés dans $\mathcal{C}$.
4. Soient F, F_1, F_2 trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On suppose que $F \subset F_1 \cup F_2$. Montrer que $F \subset F_1$ ou $F \subset F_2$.
5. Si $X \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$, on note $X\mathcal{L} = \{XV; V \in \mathcal{L}\}$. De même, on note $\mathcal{C}V = \{XV; X \in \mathcal{C}\}$ pour $V \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$.
   (a) Montrer qu'il s'agit là de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}$, de dimension n et constitués de matrices de rang inférieur ou égal à 1.
   (b) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$, de dimension n, et constitué de matrices de rang inférieur ou égal à 1. Montrer que F est soit de la forme $X\mathcal{L}$ pour $X\neq 0$, soit de la forme $\mathcal{C}V$ pour $V\neq 0$.
   (c) Calculer, pour $X, X' \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ et $V, V' \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$, les intersections $X\mathcal{L} \cap X'\mathcal{L}$, $\mathcal{C}V \cap \mathcal{C}V'$ et $X\mathcal{L} \cap \mathcal{C}V$.

   On se donne, jusqu'à la fin de cette partie, un endomorphisme f sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}$, tel que $f(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$.
6. Montrer que l'image par f d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$, de dimension n, et constitué de matrices de rang inférieur ou égal à 1, est du même type.
7. On suppose qu'il existe $X_1, X_2 \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$, non colinéaires, tels que $f(X_1\mathcal{L}) = Y_1\mathcal{L}$ et $f(X_2\mathcal{L}) = Y_2\mathcal{L}$ avec $Y_1, Y_2 \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$.
   (a) Montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$, telle que $f(X_1V) = Y_1VQ$ pour tout $V \in \mathcal{L}$.
   [Indication : définir Q sur une base de $\mathcal{L}$.]
   (b) *Pour cette question on admettra que pour une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice colonne non nulle Y et un complexe λ tels que $SX = \lambda X$.*
   Montrer que $f(X_1\mathcal{L})\neq f(X_2\mathcal{L})$. [Indication : raisonner par l'absurde - la question reste difficile cependant, ne pas hésiter à venir discuter stratégie de preuve avec moi.]
   (c) Montrer que pour tout $V \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$, $f(\mathcal{C}V)$ est de la forme $\mathcal{C}U$ avec $U \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$.
   (d) Que dire de $f(X\mathcal{L})$ pour $X \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$?
   (e) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$, il existe $Y \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$, telle que pour tout $V \in \mathcal{L}$, on ait
   $$f(XV) = YVQ$$
   pour la matrice Q obtenue en 7-a).
   (f) Montrer que $f \in G$.
8. Conclure.