

# X-ENS 2017 - PSI

## Notations

Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes.

- Pour toute fonction définie sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  et tout entier  $n \geq 1$ , on note  $f^{(n)}$  la dérivée  $n$ -ième de  $f$  sur cet intervalle (si elle existe). Ainsi,  $f^{(1)} = f'$ ,  $f^{(2)} = f''$  etc. On convient que  $f^{(0)} = f$ .
- Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $n! = 1 \times \dots \times n$  la factorielle de  $n$ . On convient que  $0! = 1$ .
- Pour tous  $m, n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant  $n$  lignes et  $m$  colonnes. On pose  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ . Le déterminant d'une matrice carrée  $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sera noté  $\det(A)$ . Sa transposée est notée  ${}^tA = [a_{j,i}]_{1 \leq j,i \leq n}$ . Lorsque  $A = [a_{1,1}] \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$  on identifie  $A$  au réel  $a_{1,1}$ .
- On note  $\mathbb{R}[X]$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour tout entier  $n \geq 0$ , on désigne par  $\mathbb{R}_n[X]$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à  $n$ . Les polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  et les fonctions polynomiales associées seront notées indistinctement. Ainsi, si  $P \in \mathbb{R}[X]$  est un polynôme, alors la fonction polynomiale associée est encore notée  $P$ .
- Etant donné un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $E$  on note  $0_E$  l'élément nul de  $E$ , et on note  $\text{Id}_E$  l'application identité de  $E$  dans lui même. On note  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .  
Si  $L \in \mathcal{L}(E)$  est un endomorphisme de  $E$  et  $n \geq 2$  un entier naturel, on note  $L^n$  l'application composée de  $L$  avec lui même  $n$  fois :  $L^n = L \circ L \circ \dots \circ L$  ( $n$  fois). Par convention,  $L^0 = \text{Id}_E$  et  $L^1 = L$ . Le noyau et l'image de  $L$  seront notés respectivement  $\ker(L)$  et  $\text{Im}(L)$ .  
Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , on note  $F_1 + F_2$  la somme de ces sous-espaces. On écrira  $F_1 \oplus F_2$  pour signifier que cette somme est directe. Si, de plus,  $E$  est muni d'un produit scalaire, on écrira  $F_1 \oplus^\perp F_2$  pour signifier que la somme est orthogonale, c'est à dire que  $F_1$  et  $F_2$  sont orthogonaux entre eux. L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  sera noté  $F^\perp$ . On notera  $\dim(F)$  la dimension de  $F$ .

## Partie I

Soit  $m \geq 2$  un entier naturel et  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $2m + 1$ . Cet espace est muni d'un produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$ . Soient  $T, M$  deux endomorphismes de  $E$  vérifiant les hypothèses suivantes :

- (H1)  $T^{2m} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$  et  $T^{2m+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .
- (H2)  $M^2 = \text{Id}_E$ .
- (H3)  $\forall (v, w) \in E^2, (M(v)|w) = (v|M(w))$ .
- (H4)  $T \circ M + M \circ T = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

On pose dans la suite

$$F^+ = \ker(M - \text{Id}_E), \quad F^- = \ker(M + \text{Id}_E)$$

On considère l'application  $S$  de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\forall (v, w) \in E^2, S(v, w) = (v|T(w)) + (T(v)|w)$$

et on note  $G$  l'ensemble des éléments  $u \in E$  vérifiant les deux propriétés suivantes :

- (a)  $u \in \text{Im}(T)$ ,
- (b)  $\forall v \in E, S(u, v) = 0$ .

1. Pour tout vecteur  $v \in E$ , on pose

$$v^+ = v + M(v), \quad v^- = v - M(v)$$

(a) Montrer que  $\forall v \in E, v^+ \in F^+$  et  $v^- \in F^-$ .

(b) Montrer que  $E = F^+ \oplus^\perp F^-$ .

(c) Montrer que  $\forall v \in F^+, T(v) \in F^-$  et que  $\forall v \in F^-, T(v) \in F^+$ .

En déduire que  $F^+$  et  $F^-$  sont stables par  $T^2$ .

2. Montrer que pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, 2m\}$ ,  $\text{Im}(T^{k+1}) \subset \text{Im}(T^k)$  et  $\text{Im}(T^{k+1}) \neq \text{Im}(T^k)$ .

3. En déduire que pour tout  $k \in \{0, \dots, 2m+1\}$ , on a

$$\dim(\text{Im}(T^k)) = 2m + 1 - k, \quad \dim(\ker(T^k)) = k$$

4. En déduire aussi que  $\text{Im}(T^k) = \ker(T^{2m+1-k})$  pour  $0 \leq k \leq 2m+1$ .

5. Soit  $k \in \{1, 2, \dots, 2m+1\}$  et  $z \in \text{Im}(T^k)^\perp \cap \text{Im}(T^{k-1})$  tel que  $z \neq 0_E$ . Après avoir justifié l'existence d'un tel vecteur  $z$ , montrer que  $T^{2m+1-k}(z) \neq 0_E$ .

6. Montrer que pour tout nombre réel  $\alpha$ , l'endomorphisme  $\text{Id}_E + \alpha T^2$  est bijectif et que

$$(\text{Id}_E + \alpha T^2)^{-1} = \sum_{k=0}^m (-1)^k \alpha^k T^{2k}$$

où  $(\text{Id}_E + \alpha T^2)^{-1}$  désigne l'endomorphisme inverse de  $\text{Id}_E + \alpha T^2$ .

7. Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et que  $G \cap \ker(T) = \{0_E\}$ .

8. En déduire que l'application  $(v, w) \in G \times G \mapsto (T(v)|T(w))$  est un produit scalaire sur  $G$ .

9. Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

(a) Montrer que  $M \circ T^k = (-1)^k T^k \circ M$ .

(b) En déduire que  $\text{Im}(T^k)$  et  $\ker(T^k)$  sont stables par  $M$ .

10. Montrer que l'une des deux assertions suivantes est vraie : (i)  $\ker(T) \subset F^+$ , (ii)  $\ker(T) \subset F^-$ .

11. On suppose ici que  $\ker(T) \subset F^+$ .

(a) Montrer que  $\forall z \in F^-, T^{2m}(z) = 0_E$ .

(b) Montrer que  $\text{Im}(T)^\perp \subset F^+$  et que  $\text{Im}(T^2)^\perp \cap \text{Im}(T) \subset F^-$ .

(c) Soit  $z \in \text{Im}(T)^\perp$  avec  $z \neq 0_E$ . Montrer que  $T(z) \in G^\perp$  et que  $T(z) \neq 0_E$ .

(d) Soit  $z \in \text{Im}(T^2)^\perp \cap \text{Im}(T)$  avec  $z \neq 0_E$ . Montrer que  $T(z) \in G^\perp$  et que  $T(z) \neq 0_E$ .

12. On dit désormais qu'un couple  $(w_1, w_2) \in E \times E$  est une *paire caractérisante* de  $G$  si  $w_1$  et  $w_2$  vérifient les trois propriétés :

(A)  $w_1 \in F^+, T(w_1) \in G^\perp$  et  $T(w_1) \neq 0_E$ ,

(B)  $w_2 \in F^-, T(w_2) \in G^\perp$  et  $T(w_2) \neq 0_E$ ,

(C)  $w_i \in \text{Im}(T^2)^\perp$  pour  $i = 1$  et  $i = 2$ .

Déduire des questions précédentes l'existence d'une paire caractérisante de  $G$ .

13. En déduire que  $\dim(G) \leq 2m - 2$ .

14. On suppose que  $G$  vérifie l'hypothèse suivantes

$$\text{(H5)} \quad \dim(G) = 2m - 2$$

Montrer que si  $(w_1, w_2)$  est une paire caractérisante de  $G$  alors  $(T(w_1), T(w_2))$  constitue une base de  $G^\perp$ .

## Partie II

On conserve toutes les notations de la partie I et on suppose que les hypothèses (H1), (H2), (H3), (H4) et (H5) sont toutes satisfaites. Soit  $(w_1, w_2)$  une paire caractérisante de  $G$  (c'est à dire vérifiant les propriétés (A), (B) et (C) de la question 12).

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on considère le problème suivant, note  $\mathcal{P}_\lambda$  :

$$\text{Trouver } u \in G \text{ tel que : } \forall v \in G, (u|v) - \lambda(T(u)|T(v)) = 0 \quad (\mathcal{P}_\lambda)$$

et on note  $H_\lambda$  l'ensemble des solutions  $u$  de ce problème. On montre facilement que  $H_\lambda$  est un sous-espace vectoriel de  $G$ .

15. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- (a) Montrer que si  $(\mathcal{P}_\lambda)$  admet une solution  $u \neq 0_E$ , alors nécessairement  $\lambda > 0$ .
- (b) Soit  $u \in G$ . Montrer que  $u$  est une solution de  $(\mathcal{P}_\lambda)$  si et seulement si

$$(\text{Id}_E + \lambda T^2)(u) \in G^\perp$$

En déduire qu'il existe deux nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$u = \alpha(\text{Id}_E + \lambda T^2)^{-1}T(w_1) + \beta(\text{Id}_E + \lambda T^2)^{-1}T(w_2)$$

- (c) Montrer que le problème  $(\mathcal{P}_\lambda)$  admet une solution non nulle si et seulement si

$$Q_1(\lambda) \cdot Q_2(\lambda) = 0$$

où pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $Q_i$  est le polynôme

$$Q_i(X) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k (T^{2k+1}(w_i)|T(w_i)) X^k$$

- (d) Supposons que  $\lambda$  est racine du polynôme produit  $Q_1 Q_2$ . Montrer que  $\dim(H_\lambda) = 2$  si  $\lambda$  est racine commune de  $Q_1$  et de  $Q_2$ , et  $\dim(H_\lambda) = 1$  sinon.
- (e) Montrer que

$$\forall i \in \{1, 2\}, Q_i(X) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k S(w_i, T^{2k+1}(w_i)) X^k$$

16. Soit  $\mathcal{B} = (z_1, \dots, z_\ell)$ , où  $\ell = 2m - 2$ , une base de  $G$ . Pour tout élément  $u$  de  $G$ , on note  $U$  (lettre majuscule) le vecteur colonne comportant les coordonnées de  $u$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ . On note  $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq \ell}$  et  $B = [b_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq \ell}$  les deux matrices carrées dont les coefficients sont définis par

$$\forall 1 \leq i, j \leq \ell, a_{i,j} = (z_i|z_j), b_{i,j} = (T(z_i)|T(z_j))$$

- (a) Soient  $u, v \in G$ . Montrer que

$$(u|v) = {}^t U A V, (T(u)|T(v)) = {}^t U B V$$

et en déduire que  $A$  et  $B$  sont inversibles.

- (b) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Montrer qu'un élément  $u \in G$  est solution de  $(\mathcal{P}_\lambda)$  si et seulement si

$$(A - \lambda B)U = 0$$

En déduire que  $(\mathcal{P}_\lambda)$  admet une solution non nulle si et seulement si  $\det(A - \lambda B) = 0$ .

(c) On définit la fonction  $\psi$  sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi(t) = \frac{\det(A - tB)}{\det(B)}$$

Montrer que cette fonction  $\psi$  est indépendante du choix de la base  $\mathcal{B}$ .

- (d) Justifier pourquoi on peut choisir la base  $\mathcal{B}$  de sorte que  $B = I_\ell$ . En déduire que  $\psi$  est une fonction polynomiale dont on précisera le degré.
- (e) Montrer que le polynôme  $\psi$  est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$  et que ses racines sont soit simples soit doubles.
- (f) Montrer que

$$\psi(X) = \frac{1}{S(w_1, T^{2m-1}(w_1))S(w_2, T^{2m-1}(w_2))} Q_1(X)Q_2(X)$$

(on justifiera pourquoi nécessairement le dénominateur est non nul).

En déduire que  $Q_1$  et  $Q_2$  sont scindés dans  $\mathbb{R}[X]$  et à racines simples.

### Partie III

On conserve ici les notations des parties I et II et on se place dans le cas particulier où  $E = \mathbb{R}_{2m}[X]$ , avec  $m \geq 2$  un entier naturel fixé. Cet espace vectoriel est muni du produit scalaire

$$\forall (P, Q) \in E^2, (P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$$

Désormais, les deux endomorphismes  $T$  et  $M$  de  $E$  seront définis par

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2m}[X], T(P) = P' \text{ et } M(P) = P^*$$

où  $P^*(X) = P(-X)$ .

On pose pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{R}_k^0[X] = \{P \in \mathbb{R}_k[X] / P(-1) = 0 \text{ et } P(1) = 0\}$$

17. Montrer que  $T$  et  $M$  vérifient bien les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4).

18. Quels sont les espaces  $F^+$  et  $F^-$  dans ce cas ?

19. Montrer que

$$\forall (P, Q) \in E^2, S(P, Q) = P(1)Q(1) - P(-1)Q(-1)$$

20. Déterminer le sous-espace  $G$ . L'hypothèse (H5) est-elle satisfaite ?

21. On définit pour tout entier naturel  $n$  le polynôme  $R_n$  comme suit

$$R_n(X) = (X^2 - 1)^n$$

et on pose désormais

$$L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} R_n^{(n)}(X)$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Quel est le degré du polynôme  $L_n$  ? Exprimer  $M(L_n)$  en fonction de  $L_n$ .

(b) Montrer que si  $n \geq 1$  alors

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], (L_n|P) = 0$$

(c) Montrer que pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$ , on a

$$L_n^{(k)}(1) = \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \frac{1}{k!2^k}$$

(d) Montrer que pour tout entier naturel  $k$ , on a

$$S(L_n, L_n^{(2k+1)}) = 2L_n^{(2k+1)}(1)$$

22. Montrer que le couple  $(L_{2m}, L_{2m-1})$  est une paire caractérisante de  $G$ .

23. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On considère le problème : trouver  $P \in \mathbb{R}_{2m-1}^0[X]$  tel que

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{2m-1}^0[X], \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt - \lambda \int_{-1}^1 P'(t)Q'(t) dt = 0$$

Montrer que ce problème admet une solution  $P$  non identiquement nulle si et seulement si  $\lambda$  est racine du polynôme

$$K(X) = \left( \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k L_{2m-1}^{(2k+1)}(1) X^k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k L_{2m}^{(2k+1)}(1) X^k \right)$$

24. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2m-1}^0[X], (P|P) \leq 4(P'|P')$$

avec inégalité stricte si  $P$  est non nul.

25. En déduire que les racines de  $K$  sont toutes réelles et appartiennent à l'intervalle  $]0, 4[$ .

26. Soit  $(P_1, \dots, P_{2m-2})$  une base quelconque de  $G$ . On considère les deux matrices carrées  $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq 2m-2}$  et  $B = [b_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq 2m-2}$  définies par

$$a_{i,j} = (P_i|P_j), \quad b_{i,j} = (P'_i|P'_j)$$

Déterminer le rapport

$$\frac{\det(A)}{\det(B)}$$

en fonction de  $m$ .