PSI* 2024/25 DL 6

Formule d'Euler Gauss pour Γ

Pour lundi 18 novembre. A faire prioritairement : parties II et III, quitte à admettre I.6.

Partie 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction u_n de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \geq 0 \ , \ u_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\Big(1 + \frac{x}{n}\Big) \, .$$

Question 1. Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $[0, +\infty[$.

Dans toute la suite du problème, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est notée S et γ désigne la valeur de $S(1)$.

Question 2. Prouver que S est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ et que :

$$\forall x \geq 0 \ , \ \frac{dS}{dx}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) .$$

Question 3. Montrer que lorsque p tend vers l'infini : $\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} = \ln p + \gamma + o(1)$.[1]

Question 4.

4.1. Prouver que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \big(u_n(x+1) - u_n(x)\big) = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} + \ln(1+x) - \ln(p+1+x)$.

4.2. En déduire que :

$$\forall x \geq 0 \ , \ S(x+1) = S(x) + \gamma + \ln(1+x).$$

Question 5. Soit φ la fonction définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x > 0 \ , \ \varphi(x) = \frac{1}{x} \exp\big(-\gamma x + S(x)\big) \, .$$

5.1. Montrer que $\forall x > 0 \ , \ \varphi(x+1) = x\,\varphi(x)$.

5.2. Vérifier que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
Calculer $\frac{d\varphi}{dx}(x)$ pour $x > 0$. Que vaut $\frac{d\varphi}{dx}(1)$?

Question 6. Pour $n \geq 1$, soit φ_n la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x > 0 \ , \ \varphi_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} .$$

Montrer que $\forall x > 0 \ , \ \varphi_n(x)$ tend vers $\varphi(x)$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 7. On note $\pi_p = \prod_{n=1}^{p} \frac{\exp(\frac{x}{n})}{1+\frac{x}{n}}$ (p entier naturel > 0).

7.1. Prouver la convergence de la suite $(\pi_p)_{p\geq 1}$ vers une limite $L(x)$.

7.2. En déduire que : $\forall x > 0 \ , \ \varphi(x) = \frac{L(x)}{x} \exp(-x\gamma)$.

1. Je ne devrais pas le dire mais ceci n'est pas qu'une question de cours : il faut que ce soit le γ de l'énoncé et pas une valeur arbitraire.

Partie 2.

Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\exp(-t)dt$.

Question 1.

1.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.

1.2. Calculer $\Gamma(1)$.

1.3. Montrer que $\forall x > 0\ ,\ \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

Question 2. Montrer que :

$$\forall x > 0\ ,\ \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = \Gamma(x).$$

Question 3. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on définit la fonction I_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}dt.$$

3.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction I_n.

3.2. Prouver que :

$$\forall x > 0\ ,\ \forall n \geq 1\ ,\ \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = n^x I_n(x).$$

3.3. Trouver une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$ et en déduire que :

$$\forall x > 0\ ,\ \Gamma(x) = \varphi(x).$$

Partie 3.

Dans toute cette partie, $x \in\,]0,1[$.

Question 1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \dfrac{x^n}{n!}\displaystyle\int_0^1 \exp(-t)|\ln t|^n dt$, $\qquad b_n = \dfrac{x^n}{n!}\displaystyle\int_1^{+\infty}\exp(-t)(\ln t)^n dt$ et $I = \int_0^{+\infty}\exp(-t+x|\ln t|)dt$.
Montrer l'existence de ces différentes quantités et établir que

$$\forall p \geq 0\ ,\ \sum_{n=0}^{p}(a_n+b_n) \leq I.$$

Question 2.

2.1. Prouver que :

$$\forall x \in\,]0,1[\ ,\ \Gamma(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\left(\int_0^{+\infty}\exp(-t)(\ln t)^n dt\right).$$

2.2. Quelle propriété de Γ en déduire sur $]1,2[$? Sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{N}$?

Question 3.

3.1. A l'aide des parties 1 et 2, vérifier que :

$$\frac{\frac{d\Gamma}{dx}(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

puis que $\frac{\frac{d\Gamma}{dx}(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}}x^k\right)$.

3.2. *Dans cette question exceptionnellement on pourra utiliser la théorie des familles sommables.*
En déduire le développement classique de la fonction "digamma"

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln\Gamma(x)) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\zeta(k+1)x^{k+1}.$$