PSI* 2024/25 DS 2

Matrices à coefficients dans $[0, 1]$

Sujet issu de Centrale 2016 - PSI 1

Dans tout ce problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et l'on note :

— $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ;

— $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

— $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n ;

— $\mathcal{X}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0, 1\}$;

— $\mathcal{Y}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $[0, 1]$;

— $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0, 1\}$ et ne contenant qu'un seul coefficient non nul par ligne et par colonne ;

— ${}^tM$ ou $M^\top$ la transposée d'une matrice M.

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{X}_3 \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \exp(-1) & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}_2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_3$$

Ce problème aborde l'étude de matrices à coefficients dans $\{0, 1\}$ à travers plusieurs thématiques indépendantes les unes des autres. Les parties 1 et 3 étudient quelques propriétés algébriques et topologiques des ensembles $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{Y}_n$ définis ci-dessus. La partie 2 étudie deux modalités de génération aléatoire de matrices à coefficients dans $\{0, 1\}$. La partie 4 étudie le cas particulier des matrices de permutation.

I Généralités

I.A. Propriétés élémentaires

I.A.1 Justifier que $\mathcal{X}_n$ est un ensemble fini et déterminer son cardinal.

I.A.2 Démontrer que pour tout $M \in \mathcal{Y}_n$, $\det(M) \leq n!$ et qu'il n'y a pas égalité.

I.A.3 Soit $M \in \mathcal{Y}_n$ et λ une valeur propre complexe de M. Montrer que $|\lambda| \leq n$ et donner un exemple explicite où l'on a l'égalité.

I.B. Etude de $\mathcal{X}'_n = \mathcal{X}_n \cap GL_n(\mathbb{R})$

On rappelle qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) est dite diagonalisable quand il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres pour M.

I.B.1 Faire la liste des éléments de $\mathcal{X}'_2$. Préciser (en justifiant) ceux qui sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$ *(pour autant on ne demande pas nécessairement d'expliciter une base de vecteurs propres).*

I.B.2 Démontrer que $\mathcal{X}'_2$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Est-ce que, pour $n \geq 2$, $\mathcal{X}'_n$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

II Matrices aléatoires de $\mathcal{X}_n$

II.A. Génération par une colonne aléatoire

Soit $p \in]0,1[$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p.

II.A.1 Calculer la probabilité que $X_1, \ldots, X_n$ soient égales.

II.A.2 Quelle est la loi de $S = X_1 + \cdots + X_n$? On attend une démonstration du résultat annoncé.

II.A.3 Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Donner la loi de la variable aléatoire $X_{i,j} = X_i \times X_j$.

II.A.4 i $\omega \in \Omega$, on introduit la matrice colonne

$$U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$$

et la matrice $M(\omega) = U(\omega)U^\top(\omega)$. L'application $M \ : \ \omega \in \Omega \mapsto M(\omega)$ est ainsi une variable aléatoire.

(a) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $M(\omega) \in \mathcal{X}_n$.

(b) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $\mathrm{Tr}(M(\omega)) \in \{0, \ldots, n\}$, que $M(\omega)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que $\mathrm{rg}(M(\omega)) \leq 1$.

II.A.5 Donner la loi, l'espérance et la variance des variables aléatoires $\mathrm{Tr}(M)$ et $\mathrm{rg}(M)$.

II.A.6 Exprimer M^k en fonction de S et M. Quelle est la probabilité pour que la suite de matrices $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit convergente ?

II.B. Génération par remplissage aléatoire

Soit $p \in]0,1[$. On part de la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée M_0. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on construit la matrice M_{k+1} à partir de M_k de la manière suivante

- on parcourt en une vague la matrice et chaque coefficient nul est changé en 1 avec la probabilité p ;
- chaque action sur un coefficient est indépendante de ce qui se passe sur les autres et des vagues précédentes.

Les M_k sont donc des variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{X}_n$ et l'on considère qu'elles sont définies sur un espace probabilisé commun $(\Omega, \mathcal{A}, PP)$. Voici un exemple de réalisation de cette évolution pour $n = 2$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $k \geq 1$, le nombre de modifications réalisées lors de la k-ième vague est noté N_k. Dans l'exemple ci-dessus : $N_1 = 2$, $N_2 = 0$, $N_3 = 1$, $N_4 = 1$, $N_5 = 0$.

On s'intéresse au plus petit indice k pour lequel la matrice M_k ne comporte que des 1 ; on dit alors qu'elle est *totalement remplie*. Dans l'exemple précédent, ce premier indice vaut 4.

On note $q = 1 - p$ et $m = n^2$.

II.B.1 Dans toute cette question on utilise le langage Python. `M` désigne une matrice carrée d'ordre n. Ses lignes et colonnes sont numérotées de 0 à $n-1$. L'expression `M[i,j]` permet d'accéder à l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j et `len(M)` donne l'ordre de la matrice `M`.

(a) Ecrire une fonction `Somme(M)` qui renvoie la somme des coefficients de la matrice `M`.

(b) Ecrire une fonction `Bernoulli(p)` qui renvoie 1 avec la probabilité p et 0 avec la probabilité $1-p$. On pourra utiliser l'expression `random()` qui renvoie un réel de l'intervalle $[0, 1[$ selon la loi uniforme.

(c) A l'aide de la fonction précédente, écrire une fonction `Modifie(M,p)` qui modifie aléatoirement la matrice `M` selon le principe décrit plus haut.

(d) Ecrire une fonction `Simulation(n,p)` qui renvoie le plus petit entier k tel que M_k est totalement remplie à partir d'un remplissage aléatoire de la matrice nulle d'ordre n (qui peut être obtenue par `zeros((n,n))`). Il n'est pas demandé de mémoriser les M_k.

II.B.2 Donner la loi de N_1, puis la loi conditionnelle de N_2 sachant $(N_1 = i)$ pour i dans un ensemble à préciser. N_1 et N_2 sont-elles indépendantes ?

II.B.3 Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Le plus petit entier $k \geq 1$ tel que le coefficient ligne i, colonne j de M_k vaut 1 est noté $T_{i,j}$ (dans l'exemple ci-dessus, $T_{1,1} = 1$ et $T_{1,2} = 3$). Donner la loi de $T_{i,j}$.

II.B.4 Pour un entier $k \geq 1$, donner la valeur de $\mathbb{P}(T_{i,j} \geq k)$.

II.B.5 Soient $r \geq 1$ un entier et $S_r = N_1 + \cdots + N_r$. Que représente S_r ? Donner sa loi (on pourra utiliser la question précédente).

II.B.6 On note N le plus petit indice k pour lequel la matrice M_k est totalement remplie.

(a) Proposer une démarche pour approcher l'espérance de N à l'aide d'une simulation informatique utilisant les fonctions précédentes.

(b) Donner une expression de la valeur exacte de cette espérance faisant intervenir q et m.

III Deux problèmes d'optimisation

III.A. Etude de la distance à $\mathcal{Y}_n$

Pour tout $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on note

$$(M|N) = \mathrm{Tr}(M^\top N)$$

III.A.1 Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Expliciter $(M|N)$ en fonction des coefficients de M et N.
On notera $\|M\|$ la norme euclidienne associée.

III.A.2 L'ensemble $\mathcal{Y}_n$ est-il un espace vectoriel ?

III.A.3 On fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, prouver qu'il existe une unique matrice $M \in \mathcal{Y}_n$, que l'on explicitera, telle que :

$$\forall N \in \mathcal{Y}_n,\ \|A - M\| \leq \|A - N\|$$

III.B. Maximisation du déterminant sur $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{Y}_n$

III.B.1 Justifier que le déterminant possède un maximum sur $\mathcal{X}_n$ (noté x_n) et une borne supérieure sur $\mathcal{Y}_n$ (notée y_n).

III.B.2 Démontrer que la suite $(y_k)_{k\geq 2}$ est croissante.

III.B.3 Soit $J \in \mathcal{X}_n$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. On pose $M = J - I_n$. Calculer $\det(M)$ et en déduire que $\lim\limits_{k\to+\infty} y_k = +\infty$.

III.B.4 Soit $N = (n_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{Y}_n$. Fixons $1 \leq i, j \leq n$ et supposons que $n_{i,j} \in]0, 1[$. Démontrer qu'en remplaçant $n_{i,j}$ soit par 0 soit par 1, on peut obtenir une matrice N' de $\mathcal{Y}_n$ telle que $\det(N) \leq \det(N')$. En déduire que $x_n = y_n$.

IV Matrices de permutations

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on note $(e_1, \dots, e_n)$ sa base canonique.

On note S_n l'ensemble des bijections de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ dans lui même (appelées *permutations*).

Pour tout $\sigma \in S_n$, on note P_σ la matrice de $\mathcal{P}_n$ dont le coefficient ligne i, colonne j vaut 1 si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon. On dit que P_σ est la *matrice de permutation* associée à σ.

On note u_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à P_σ.

IV.A. Description de $\mathcal{P}_n$

IV.A.1 Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{X}_n$ est un élément de $\mathcal{P}_n$ si et seulement si les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

IV.A.2 En déduire que pour une telle matrice $M \in \mathcal{P}_n$, on a $M^\top M = \mathrm{I}_n$ et que le déterminant de M vaut 1 ou -1.

IV.B. Quelques propriétés des éléments de $\mathcal{P}_n$

IV.B.1 Soient $\sigma, \sigma' \in S_n$. Démontrer que $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}$.
Justifier que l'application $k \in \mathbb{Z} \mapsto \sigma^k \in S_n$ n'est pas injective. En déduire qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $\sigma^N = \mathrm{Id}_{\{1,\dots,n\}}$ (application identité de $\{1,\dots,n\}$).

IV.B.2 Démontrer que si M est élément de $\mathcal{P}_n$, toute valeur propre de M est une racine N-ème de l'unité.

IV.B.3 Déterminer les vecteurs propres communs à tous les éléments de $\mathcal{P}_n$ dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

IV.B.4 On se propose de démontrer que les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les u_σ, $\sigma \in S_n$, sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^n$, la droite D engendrée par $e_1 + \cdots + e_n$ et l'hyperplan H orthogonal à D.

(a) Vérifier que ces quatre sous-espaces vectoriels sont stables par tous les u_σ.

(b) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, non contenu dans D et stable par tous les u_σ. Démontrer qu'il existe un couple $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ avec $i \neq j$ tel que $e_i - e_j \in V$, puis que les $n-1$ vecteurs $e_k - e_j$ ($k \in \{1,\dots,n\}$, $k \neq j$) appartiennent à V.

(c) Conclure.

IV.C. Une caractérisation des éléments de $\mathcal{P}_n$

On se donne une matrice M de $GL_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont des entiers naturels et telle que l'ensemble formé par tous les coefficients de toutes les puissances successives de M est fini.

Démontrer que M^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{N}$ et en déduire que M est une matrice de permutation. Que dire de la réciproque ?