PSI* 2024/25 DL 7

Intégrale de Dirichlet généralisée
Application probabiliste

On fixe un entier $p \in \mathbb{N}$. Le but de ce sujet est de calculer l'intégrale de Dirichlet généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

et d'appliquer ce calcul pour évaluer une espérance.

Partie I : Calcul d'une intégrale

Dans tout ce qui suit, x est un élément de $]0,1[$ fixé.

1. Montrer que pour tout $\theta \in]-\pi,\pi[$, la fonction définie par

$$\begin{array}{rccc} f: &]0,+\infty[& \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \dfrac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}} \end{array}$$

est définie et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Soit r la fonction définie par

$$\begin{array}{rccc} r: &]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{C} \\ & \theta & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}}\,\mathrm{d}t \end{array}.$$

2. Montrer que la fonction r est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ et que :

$$\forall \theta \in]-\pi,\pi[, \quad r'(\theta) = -ie^{i\theta}\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+te^{i\theta})^2}\,\mathrm{d}t.$$

Indication : soit $\beta \in]0,\pi[$, montrer que pour tout $\theta \in [-\beta,\beta]$ et $t \in [0,+\infty[$, $|1+te^{i\theta}|^2 \geqslant |1+te^{i\beta}|^2 = (t+\cos(\beta))^2+(\sin(\beta))^2$.

Soit g la fonction définie par

$$\begin{array}{rccc} g: &]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{C} \\ & \theta & \mapsto & e^{ix\theta}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}}\,\mathrm{d}t \end{array}.$$

3. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ et que pour tout $\theta \in]-\pi,\pi[$:

$$g'(\theta) = ie^{ix\theta}\int_0^{+\infty} h'(t)\,\mathrm{d}t,$$

où h est la fonction définie par

$$\begin{array}{rccc} h: &]0,+\infty[& \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \dfrac{t^x}{1+te^{i\theta}} \end{array}.$$

Calculer $h(0)$ et :

$$\lim_{t\to+\infty} h(t).$$

En déduire que la fonction g est constante sur $]-\pi,\pi[$.

4. Montrer que pour tout $\theta\in]0,\pi[$,

$$g(\theta)\sin(x\theta)=\frac{1}{2i}\left(g(-\theta)e^{ix\theta}-g(\theta)e^{-ix\theta}\right)=\sin(\theta)\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\,\mathrm{d}t.$$

5. En déduire que :

$$\forall\theta\in]0,\pi[,\quad g(\theta)\sin(x\theta)=\int_{\mathrm{cotan}(\theta)}^{+\infty}\frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2}\,\mathrm{d}u,$$

où $\mathrm{cotan}(\theta)=\dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

6. Montrerque :

$$\lim_{\theta\to\pi^-} g(\theta)\sin(x\theta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

7. En déduire que

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

On rappelle que x est un élément de $]0,1[$ fixé.

8. Montrer que

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\frac{t^{x-1}}{1+t}+\frac{t^{-x}}{1+t}\right)\mathrm{d}t.$$

9. Montrer que :

$$\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+x}.$$

10. Établir l'identité

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1-x}.$$

11. En déduire que l'on a

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)}=\frac{1}{x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n x}{n^2-x^2}.$$

12. En déduire enfin que :

$$\forall y\in]0,\pi[,\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n y\sin(y)}{y^2-n^2\pi^2}=1-\frac{\sin(y)}{y}.$$

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge et que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t=(2p+1)\int_0^{+\infty}(\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} \,\mathrm{d}t.$$

15. En déduire que :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} \right) \mathrm{d}t.$$

16. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas $p = 0$, cette intégrale est communément appelée « intégrale de Dirichlet ».

17. Question enlevée, étape intermédiaire pour la suivante pas forcément pertinente
18. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \frac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2}.$$

Partie IV : Calcul de $E(|S_n|)$

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soient $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi donnée par :

$$P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

19. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

Soient S et T deux variables aléatoires indépendantes prenant toutes deux un nombre fini de valeurs réelles. On suppose que T et $-T$ suivent la même loi.

20. Montrer que :

$$E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T)).$$

21. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$E(\cos(tS_n)) = (\cos(t))^n.$$

22. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$ et $|b| \leqslant |a|$. Montrer que

$$|a+b| = |a| + \mathrm{signe}(a)b$$

où $\mathrm{signe}(x) = x/|x|$ pour tout x réel non nul. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E\left(|S_{2n}|\right) = E\left(|S_{2n-1}|\right).$$

23. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}|s|.$$

24. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$E\left(|S_n|\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^n}{t^2} \,\mathrm{d}t.$$

25. Conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E\left(|S_{2n}|\right) = E\left(|S_{2n-1}|\right) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}\left((n-1)!\right)^2}.$$

Fin du problème