PSI* 2014/15 - DL5

Polynômes unitaires de norme minimale

Pour mercredi 26 novembre

Pour tout entier $d \geqslant 0$, on désigne par $\mathscr{E}_d$ l'espace vectoriel complexe des polynômes à coefficients complexes de degré $\leqslant d$ et par $\mathscr{U}_d$ le sous-ensemble des polynômes unitaires de degré d.

Première partie

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres complexes distincts. On considère le polynôme

$$P(X) = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (X - x_k),$$

et l'on désigne par P' le polynôme dérivé de P.

1. Pour tout entier j, $1 \leqslant j \leqslant n$, on pose

$$P_j(X) = \frac{P(X)}{(X - x_j)P'(x_j)}.$$

a) Montrer que cette expression définit un polynôme P_j de degré $n-1$.

b) Calculer $P_j(x_k)$, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, et montrer que, pour tout polynôme F, le polynôme $L_F = \sum_{j=1}^{n} F(x_j) P_j$ prend la même valeur que F en tous les points $x_1, \ldots, x_n$.

c) Montrer que $\sum_{j=1}^{n} P_j = 1$.

d) Les polynômes P_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, forment-ils une base de $\mathscr{E}_{n-1}$?

2. Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on pose $P_j(X) = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i,j} X^i$, où $b_{i,j} \in \mathbb{C}$. Soient V et B les matrices complexes $n \times n$ dont les éléments à la i^{e} ligne $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et à la j^{e} colonne $(1 \leqslant j \leqslant n)$ sont $(x_i)^{j-1}$ et $b_{i-1,j}$, respectivement. Montrer que V est inversible, et que V et B sont inverses l'une de l'autre.

3. a) Montrer que $b_{n-1,j} = \dfrac{1}{P'(x_j)}$. Déterminer la valeur de $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(x_k)^j}{P'(x_k)}$ pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$.

b) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(X - x_k)^{n-1}}{P'(x_k)}$ est un polynôme constant que l'on calculera.

⋆⋆⋆

Dans toute la suite du problème, $d \in \mathbb{N}^*$ est un entier fixé, ρ un réel strictement positif et $K = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant \rho\}$. Pour tout polynôme $Q \in \mathscr{E}_d$, on pose

$$\|Q\|_K = \sup_{z \in K} |Q(z)|.$$

Deuxième partie

Pour tout polynôme $Q \in \mathscr{E}_d$, défini par $Q(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$, on pose

$$N(Q) = \sup_{0 \leqslant i \leqslant d} |a_i|.$$

4. a) Montrer que $Q \mapsto N(Q)$ et $Q \mapsto \|Q\|_K$ sont des normes sur $\mathscr{E}_d$ et qu'elles sont équivalentes.

b) Majorer, pour $Q \in \mathscr{E}_d$, non nul, $\dfrac{\|Q\|_K}{N(Q)}$ en fonction de ρ. Montrer que $\sup\limits_{\substack{Q \in \mathscr{E}_d \\ Q \neq 0}} \dfrac{\|Q\|_K}{N(Q)}$ existe et le majorer.

c) On choisit $n = d+1$ points distincts dans K, $x_1, \ldots, x_{d+1}$, et l'on reprend les notations de la première partie. On pose $\beta = \sup\limits_{\substack{0 \leqslant i \leqslant d \\ 1 \leqslant j \leqslant d+1}} |b_{i,j}|$. En utilisant les résultats de la question **2.**, montrer que

$$\sup_{\substack{Q \in \mathscr{E}_d \\ Q \neq 0}} \frac{N(Q)}{\|Q\|_K} \leqslant \beta(d+1).$$

$\star\star\star$

Dans toute la suite du problème, on pose

$$m = \inf_{Q \in \mathscr{U}_d} \|Q\|_K.$$

On saura ultérieurement montrer, par un argument de compacité, qu'il existe $Q_0 \in \mathscr{U}_d$ tel que $\|Q_0\|_K = m$. On admet ce résultat.

Troisième partie

On admet le résultat suivant (qui sera démontré dans la suite du cours) : soit f une fonction continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Soit $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant 1\}$. Alors f est bornée sur D et il existe un complexe $z_0 \in D$ tel que $|f(z_0)| = \max_{z \in D} |f(z)|$.

5. Montrer que $0 \leqslant m \leqslant \rho^d$.

6. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et c_k un nombre complexe non nul. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On considère le polynôme

$$Q(X) = 1 + c_k(X - z_0)^k.$$

Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|Q(z)| > |Q(z_0)|$. [On pourra considérer le module et l'argument de c_k et de $z - z_0$.]

7. Plus généralement, soit $Q \in \mathscr{E}_d$ et soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que $Q(z_0) = 1$ et que Q n'est pas constant.

a) Montrer qu'il existe un entier $k \geqslant 1$, un nombre complexe c_k, $c_k \neq 0$, et un polynôme R tels que

$$Q(X) = 1 + c_k(X - z_0)^k + c_k(X - z_0)^{k+1} R(X).$$

b) Montrer que, pour tout réel $r > 0$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| = r$ et

$$Q(z) = 1 + |c_k| \ |z - z_0|^k + |c_k| \ |z - z_0|^k (z - z_0) R(z).$$

c) Montrer que, pour tout réel $r > 0$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| \leqslant r$ et

$$|Q(z)| > |Q(z_0)|.$$

8. a) Montrer que la propriété démontrée à la question **7.c** est satisfaite pour tout polynôme non constant $Q \in \mathscr{E}_d$ et pour tout point $z_0 \in \mathbb{C}$.

b) En déduire que, pour tout $Q \in \mathscr{E}_d$,

$$\sup_{|z| \leqslant 1} |Q(z)| = \sup_{|z| = 1} |Q(z)|.$$

c) Montrer que, pour tout $Q \in \mathscr{E}_d$,

$$\sup_{|z| \geqslant 1} \left| \frac{Q(z)}{z^d} \right| = \sup_{|z| = 1} |Q(z)|.$$

d) *Dans cette question*, on choisit $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$. Montrer que le polynôme $Q_0(X) = X^d$ satisfait

$$\|Q_0\|_K = m.$$