

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2004

FILIÈRE **PC**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Polynômes unitaires de norme minimale

Pour tout entier $d \geq 0$, on désigne par \mathcal{E}_d l'espace vectoriel complexe des polynômes à coefficients complexes de degré $\leq d$ et par \mathcal{U}_d le sous-ensemble des polynômes unitaires de degré d .

Première partie

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient x_1, \dots, x_n des nombres complexes distincts. On considère le polynôme

$$P(X) = \prod_{1 \leq k \leq n} (X - x_k),$$

et l'on désigne par P' le polynôme dérivé de P .

1. Pour tout entier j , $1 \leq j \leq n$, on pose

$$P_j(X) = \frac{P(X)}{(X - x_j) P'(x_j)}.$$

a) Montrer que cette expression définit un polynôme P_j de degré $n - 1$.

b) Calculer $P_j(x_k)$, pour $1 \leq k \leq n$, et montrer que, pour tout polynôme F , le polynôme $L_F = \sum_{j=1}^n F(x_j) P_j$ prend la même valeur que F en tous les points x_1, \dots, x_n .

c) Montrer que $\sum_{j=1}^n P_j = 1$.

d) Les polynômes P_j , $1 \leq j \leq n$, forment-ils une base de \mathcal{E}_{n-1} ?

2. Pour $1 \leq j \leq n$, on pose $P_j(X) = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i,j} X^i$, où $b_{i,j} \in \mathbf{C}$. Soient V et B les matrices complexes $n \times n$ dont les éléments à la i^{e} ligne ($1 \leq i \leq n$) et à la j^{e} colonne ($1 \leq j \leq n$) sont $(x_i)^{j-1}$ et $b_{i-1,j}$, respectivement. Montrer que V est inversible, et que V et B sont inverses l'une de l'autre.

3.a) Montrer que $b_{n-1,j} = \frac{1}{P'(x_j)}$. Déterminer la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{(x_k)^j}{P'(x_k)}$ pour $0 \leq j \leq n-1$.

b) En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{(X - x_k)^{n-1}}{P'(x_k)}$ est un polynôme constant que l'on calculera.

Dans toute la suite du problème, $d \in \mathbf{N}^*$ est un entier fixé, et K est une partie compacte du plan complexe, contenant au moins $d+1$ éléments. On pose $\rho = \sup_{z \in K} |z|$. Pour tout polynôme $Q \in \mathcal{E}_d$, on pose

$$\|Q\|_K = \sup_{z \in K} |Q(z)|.$$

Deuxième partie

Pour tout polynôme $Q \in \mathcal{E}_d$, défini par $Q(X) = \sum_{i=0}^d a_i X^i$, on pose

$$N(Q) = \sup_{0 \leq i \leq d} |a_i|.$$

4.a) Montrer que $Q \mapsto N(Q)$ et $Q \mapsto \|Q\|_K$ sont des normes sur \mathcal{E}_d et qu'elles sont équivalentes.

b) La fonction $Q \mapsto \|Q\|_K$ est-elle continue sur l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}_d, \|\cdot\|_K)$?

5.a) Majorer $\sup_{\substack{Q \in \mathcal{E}_d \\ Q \neq 0}} \frac{\|Q\|_K}{N(Q)}$ en fonction de ρ .

b) On choisit $n = d+1$ points distincts dans K , x_1, \dots, x_{d+1} , et l'on reprend les notations de la première partie. On pose $\beta = \sup_{\substack{0 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq d+1}} |b_{i,j}|$. En utilisant les résultats de la question **2.**, montrer que

$$\sup_{\substack{Q \in \mathcal{E}_d \\ Q \neq 0}} \frac{N(Q)}{\|Q\|_K} \leq \beta(d+1).$$

Dans toute la suite du problème, on pose

$$m = \inf_{Q \in \mathcal{U}_d} \|Q\|_K.$$

Troisième partie

6.a) Montrer que $0 \leq m \leq \rho^d$.

b) Montrer que $\inf_{\substack{Q \in \mathcal{U}_d \\ \|Q\|_K \leq \rho^d}} \|Q\|_K = m$.

c) Montrer qu'il existe $Q_0 \in \mathcal{U}_d$ tel que $\|Q_0\|_K = m$.

Quatrième partie

7. Soient $k \in \mathbf{N}^*$ et c_k un nombre complexe non nul. Soit $z_0 \in \mathbf{C}$. On considère le polynôme

$$Q(X) = 1 + c_k(X - z_0)^k .$$

Montrer qu'il existe $z \in \mathbf{C}$ tel que $|Q(z)| > |Q(z_0)|$. [On pourra considérer le module et l'argument de c_k et de $z - z_0$.]

8. Plus généralement, soit $Q \in \mathcal{E}_d$ et soit $z_0 \in \mathbf{C}$. On suppose que $Q(z_0) = 1$ et que Q n'est pas constant.

a) Montrer qu'il existe un entier $k \geq 1$, un nombre complexe c_k , $c_k \neq 0$, et un polynôme R tels que

$$Q(X) = 1 + c_k(X - z_0)^k + c_k(X - z_0)^{k+1}R(X) .$$

b) Montrer que, pour tout réel $r > 0$, il existe $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z - z_0| = r$ et

$$Q(z) = 1 + |c_k| |z - z_0|^k + |c_k| |z - z_0|^k (z - z_0) R(z) .$$

c) Montrer que, pour tout réel $r > 0$, il existe $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z - z_0| \leq r$ et

$$|Q(z)| > |Q(z_0)| .$$

9.a) Montrer que la propriété démontrée à la question 8.c) est satisfaite pour tout polynôme non constant $Q \in \mathcal{E}_d$ et pour tout point $z_0 \in \mathbf{C}$.

b) En déduire que, pour tout $Q \in \mathcal{E}_d$,

$$\sup_{|z| \leq 1} |Q(z)| = \sup_{|z|=1} |Q(z)| .$$

c) Montrer que, pour tout $Q \in \mathcal{E}_d$,

$$\sup_{|z| \geq 1} \left| \frac{Q(z)}{z^d} \right| = \sup_{|z|=1} |Q(z)| .$$

d) Dans cette question, on choisit $K = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\}$. Montrer que le polynôme $Q_0(X) = X^d$ satisfait

$$\|Q_0\|_K = m .$$

Cinquième partie

10. Soient z_0 et z_1 deux nombres complexes non nuls. Montrer que $|z_0 + z_1| = |z_0| + |z_1|$ si et seulement s'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $z_1 = \lambda z_0$.

Pour $Q \in \mathcal{E}_d$, on pose

$$\mathcal{M}(Q) = \{z \in K \mid |Q(z)| = \|Q\|_K\}.$$

11. On suppose qu'il existe des polynômes distincts $Q_0 \in \mathcal{U}_d$ et $Q_1 \in \mathcal{U}_d$ vérifiant

$$\|Q_0\|_K = \|Q_1\|_K = m.$$

Pour tout $t \in]0, 1[$, on pose

$$Q_t = tQ_1 + (1-t)Q_0.$$

a) Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, $\|Q_t\|_K = m$.

b) Soit $t \in]0, 1[$ et soit $z \in \mathcal{M}(Q_t)$. Montrer que $z \in \mathcal{M}(Q_0)$ et $z \in \mathcal{M}(Q_1)$, puis montrer que $Q_0(z) = Q_1(z)$.

c) En déduire que, pour tout $t \in]0, 1[$, $\text{Card}(\mathcal{M}(Q_t)) < d$.

12. On suppose qu'il existe $Q \in \mathcal{U}_d$ tel que $\|Q\|_K = m$ et tel que $\text{Card}(\mathcal{M}(Q)) \leq d$.

a) Montrer qu'il existe un polynôme $L \in \mathcal{E}_{d-1}$ tel que, pour tout $z \in \mathcal{M}(Q)$, $L(z) = Q(z)$.

b) Soit $Q_p = Q - \frac{1}{p}L$, pour $p \in \mathbf{N}^*$. Montrer que, pour chaque $p \in \mathbf{N}^*$, il existe $z_p \in K$ tel que $|Q_p(z_p)| \geq \|Q\|_K$.

On admettra le résultat suivant : il existe une suite strictement croissante de nombres entiers, $p \mapsto n_p$, telle que la suite $p \mapsto z_{n_p}$ converge vers un élément ℓ de la partie compacte K de \mathbf{C} , quand p tend vers $+\infty$.

c) Montrer que $|Q(\ell)| = \|Q\|_K$. En déduire que $Q(\ell) = L(\ell)$.

d) Montrer que $Q(z_{n_p}) = Q(\ell)(1 + \varepsilon_p)$ et $L(z_{n_p}) = Q(\ell)(1 + \varepsilon_p)(1 + \varepsilon'_p)$, où ε_p et ε'_p sont des suites de nombres complexes, définies pour p assez grand, telles que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \varepsilon_p = 0$ et $|1 + \varepsilon_p| \leq 1$, et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \varepsilon'_p = 0$. En déduire que, pour p assez grand, $|Q_{n_p}(z_{n_p})| < \|Q\|_K$.

13. Y a-t-il unicité du polynôme $Q_0 \in \mathcal{U}_d$ tel que $\|Q_0\|_K = m$?

* *
*