PSI* 2024/25 DS 3

Convolution, théorème central limite

Source : bricolage du Centrale PC 2007 et des morceaux de Centrale 2012 - MP 1. La partie I et la IV sont presque indépendantes de II et III qui elles forment un bloc continu.

On note :
$\mathcal{C}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
$\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ constitué des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$ et appartenant à $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
$L^1(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ constitué des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ et appartenant à $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
$L^2(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ constitué des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et appartenant à $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
Pour toute fonction u bornée, et notamment si $u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, on pose $\|u\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |u(t)|$.

Pour toute fonction u de $L^1(\mathbb{R})$ on pose $\|u\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|\,\mathrm{d}t$.

Pour toute fonction u de $L^2(\mathbb{R})$ on pose $\|u\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2\,\mathrm{d}t}$.

On admet que ces expressions définissent des normes sur les espaces en question.

Soit u une fonction complexe définie sur $\mathbb{R}$. Le support de u est l'adhérence de l'ensemble $A_f = \{x \in \mathbb{R}, u(x) \neq 0\}$. On dit que u est à support compact si son support est borné dans $\mathbb{R}$. En d'autres termes u est à support compact quand il existe un réel $A \geq 0$ tel que u soit nulle en dehors de $[-A, A]$.

Partie I - Produit de convolution

Soient $u, v \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Pour un réel x donné, lorsque la fonction $t \mapsto u(t)v(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$(u * v)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v(x-t)\,\mathrm{d}t$$

I.A - Généralités

I.A.1) Dans chacun des deux cas suivants, montrer que $u * v$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$ et donner une majoration de $\|u * v\|_\infty$ faisant intervenir le produit d'une certaine norme ($\|.\|_1$, $\|.\|_2$ ou $\|.\|_\infty$) de u et de v :
a. quand $u \in L^1(\mathbb{R}), v \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$;
b. quand $u, v \in L^2(\mathbb{R})$.

I.A.2) Soient $u, v \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telles que $(u * v)(x)$ soit défini pour tout réel x. Montrer que $u * v = v * u$.

I.A.3) Soient u, v continues et à support compact. Montrer que $u * v$ est à support compact.

I.B - Continuité, dérivabilité

I.B.1) On suppose que $u \in L^1$ et que $v \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. Montrer que $u * v$ est continue.

I.B.2) On suppose que $u \in L^1$ et que v est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec v, v' bornées sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $u * v$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $(u * v)'$ à l'aide de u et v'.

I.B.3) Soit k, ℓ deux entiers naturels non nul. On suppose que u est de classe $\mathcal{C}^k$ et à support compact, et que v est de classe $\mathcal{C}^\ell$ sur $\mathbb{R}$, toutes les dérivées de v jusqu'à l'ordre ℓ étant bornées sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $u * v$ est de classe $\mathcal{C}^{k+\ell}$ sur $\mathbb{R}$ et préciser sa fonction dérivée d'ordre $k + \ell$.

I.C - Produit de convolution de deux éléments de $L^2(\mathbb{R})$

Pour toute fonction $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et tout réel α on définit la fonction $T_\alpha(u)$ en posant $T_\alpha(u)(x) = u(x-\alpha)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dans cette sous-partie I.C on suppose que u et v appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$.

I.C.1) Pour tout réel α, montrer que $T_\alpha(u * v) = T_\alpha(u) * v$.

I.C.2) Pour tout réel α, montrer que $\|T_\alpha(u * v) - (u * v)\|_\infty \leq \|T_\alpha(u) - u\|_2.\|v\|_2$.

I.C.3) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout réel $\alpha \in [-1, 1]$, $\int_A^{+\infty} |T_\alpha(u)(t) - u(t)|^2 \,\mathrm{d}t < \varepsilon$ et $\int_{-\infty}^{-A} |T_\alpha(u)(t) - u(t)|^2 \,\mathrm{d}t < \varepsilon$.

I.C.4) En déduire que $u * v$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Partie II - Espace E

Dans toute la suite du problème, on notera f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \,\mathrm{d}x = 1$.

Dans toute la suite du problème, on note E l'ensemble des fonctions g continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telles qu'il existe un réel positif $M(g)$ et un réel strictement positif λ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| \leqslant M(g) f(\lambda x)$.

II.A - Démontrer que E muni des lois $+$ et $\cdot$ usuelles est un espace vectoriel qui contient f.

II.B - Pour deux éléments u et v de E, on veut définir l'application $u * v$ comme en partie I.

II.B.1) Montrer que si u et v sont dans E, pour tout réel x, $(u * v)(x)$ est bien défini.

II.B.2) Déterminer $(f * f)(x)$. On exprimera le résultat sous la forme $\alpha f(\alpha x)$ où α est un réel strictement positif que l'on précisera.

II.B.3) Démontrer que $u * v$ appartient à E (on utilisera notamment le résultat de la question précédente).

II.C - On définit l'application $\widehat{u}$ par : $\widehat{u}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx} u(x) \,\mathrm{d}x$. On va montrer que cette définition a bien un sens pour $u \in E$.

II.C.1) Donner un exemple de fonction $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{h}(t)$ n'est pas définie pour tous les réels t.

II.C.2) Montrer qu'en revanche $\widehat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}(t) = e^{t^2/2}$.

II.C.3) Soit $u \in E$. Montrer que $\widehat{u}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

II.C.4) Soit $u \in E$. Montrer que $\widehat{u}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression de $\widehat{u}'(t)$ et $\widehat{u}''(t)$ à l'aide d'intégrales.

II.D - *Dans cette section D seulement, on admet le résultat suivant.*

Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe deux applications h_1 et h_2 continues sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x, y)| \leqslant h_1(x) h_2(y),$$

alors $\int_{-\infty}^{+\infty} (\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \,\mathrm{d}x) \,\mathrm{d}y$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} (\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \,\mathrm{d}y) \,\mathrm{d}x$ sont convergentes et ces deux intégrales doubles sont égales.

Soient u et v deux éléments de E.

II.D.1) Démontrer qu'il existe une constante $a > 0$ telle que pour tout couple $(x, t) \in \mathbb{R}^2$:

$$-t^2 - (x-t)^2 \leqslant -a(t^2 + x^2).$$

II.D.2) Démontrer la formule :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (u * v)(x) \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} v(x) \,\mathrm{d}x.$$

II.D.3) En déduire la relation, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{u * v}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\theta} (u * v)(x) \,\mathrm{d}x = \widehat{u}(\theta) \widehat{v}(\theta).$$

Partie III - Convoluée itérée, théorème central limite

Dans la suite de ce problème, on considère le sous-ensemble E_1 de E dont les éléments sont les fonctions $h \in E$ telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = 1$. On notera que la fonction f de la partie I est un élément de E_1. À toute fonction $h \in E_1$, on associe la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par la récurrence suivante :

$$h_1 = h \quad \text{et pour tout } n \geqslant 2, \quad h_n = h_{n-1} * h_1.$$

On remarquera que la fonction h_n est alors élément de E d'après II.B.3.
L'objectif est d'étudier certaines propriétés de cette suite de fonctions, dans un premier temps sur des exemples puis dans le cas général.

III.A. - Soit h un élément de E_1.

III.A.1) Démontrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de E_1.

III.A.2) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{h_n}(x)$ en fonction de $\widehat{h}(x)$ et de n.

III.B - Dans cette question, on étudie la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ étudiée dans la partie I (on a donc posé $h = f$).

III.B.1) Déterminer une constante K_2 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = K_2 e^{-x^2/4}$.

III.B.2) Déterminer une constante K_n telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = K_n e^{-x^2/(2n)}$.

III.B.3) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \widehat{f_n}(\frac{t}{\sqrt{n}})$ en fonction de $t \in \mathbb{R}$.

Au choix -> faire IIIC ou passer à IIID et IV

J'ai failli enlever IIIC - je le laisse pour ceux qui veulent un sujet de DS format "Centrale" avec du calcul explicite. Ceux qui veulent plus de théorique peuvent sauter III C pour aller en IIID.

III.C - Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos(x) & \text{si } x \in [-\pi/2, \pi/2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

III.C.1) Démontrer que $g \in E_1$.

III.C.2) Montrer que la fonction $g * g$ est paire. Donner pour $x \geqslant 0$ l'expression de $(g*g)(x)$ en fonction des valeurs de x : on distinguera deux intervalles pour x.

III.C.3) Démontrer que g_n est nulle en dehors d'un intervalle $[-a_n, a_n]$ que l'on précisera.

III.C.4) Déterminer l'expression de $\widehat{g}(t)$ en fonction de t.

III.C.5) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \widehat{g_n}(\frac{t}{\sqrt{n}})$ en fonction de t.

III.D - Soit h un élément de E_1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$M_{1,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} x h_n(x)\,\mathrm{d}x, \quad M_{2,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 h_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad V_n = M_{2,n} - M_{1,n}^2.$$

III.D.1) Montrer que la fonction $\widehat{h_n}$ possède un développement limité à l'ordre 2 en zéro dont on précisera les coefficients à l'aide de $M_{1,n}$ et $M_{2,n}$.

III.D.2) En déduire que $M_{1,n} = nM_{1,1}$ et $V_n = nV_1$.

III.D.3) On suppose en outre que la fonction h est telle que $M_{1,1} = 0$. Déterminer la limite de la suite $(\widehat{h_n}(\frac{t}{\sqrt{n}}))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Partie IV - Approximation de l'unité

Pour tout entier naturel n, on note p_n la fonction définie sur $[-1,1]$ par

$$p_n(t) = \frac{(1-t^2)^n}{\lambda_n}$$

et nulle hors de $[-1,1]$, le réel λ_n étant donné par la formule

$$\lambda_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, \mathrm{d}t$$

IV.A -

Montrer que si u est une fonction continue à support inclus dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, alors $p_n * u$ est une fonction polynomiale sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et nulle en-dehors de l'intervalle $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.

IV.B -

IV.B.1) En utilisant le changement de variable $s = \sqrt{n}t$, donner un équivalent pour λ_n.

IV.B.2) On suppose u lipschitzienne sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Montrer que les fonctions $p_n * u$ forment une suite de polynômes, qui converge uniformément vers u sur $\mathbb{R}$.

On vient donc de montrer le théorème de Weierstrass : « toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de polynômes »dans une version limitée aux fonctions lipschitziennes, et qui pourrait être étendue à toute fonction continue avec des procédés analogues à I.D.

Fin