

Résonance paramétrique

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Ce problème propose une première approche mathématique de la résonance paramétrique, phénomène physique que l'on rencontre aussi bien dans les recherches sur le mouvement de la lune que dans la manière de faire démarrer une escarpolette, ou dans l'étude des matériaux semi-conducteurs.

Soit q une fonction réelle de la variable réelle t , continue et périodique de période $T > 0$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, q(t+T) = q(t).$$

Soit λ un nombre complexe. On considère l'équation différentielle du second ordre

$$x'' + (\lambda - q(t))x = 0 \tag{1}$$

où x est une fonction complexe, de classe $\mathcal{C}^2$, de la variable t .

Première partie

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des solutions de l'équation (1). Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel complexe.
2. Soient x_1 et x_2 deux solutions de (1). On pose $W(x_1, x_2) = x_1 x_2' - x_1' x_2$. Montrer que $W(x_1, x_2)$ est indépendant de t .
3. Soit $\mathcal{T}$ l'opérateur de translation par T qui, à une fonction complexe f , associe la fonction $\mathcal{T}(f)$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{T}(f)(t) = f(t+T).$$
 - (a) Montrer que, si $f \in \mathcal{E}$, alors $\mathcal{T}(f) \in \mathcal{E}$.
 - (b) On désigne par τ la restriction de $\mathcal{T}$ à $\mathcal{E}$. Montrer que c'est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$.
4.
 - (a) Montrer qu'il existe une unique solution x_1 de (1) telle que

$$x_1(0) = 1, x_1'(0) = 0,$$
 et une unique solution x_2 de (1) telle que :

$$x_2(0) = 0, x_2'(0) = 1.$$
 - (b) Montrer que x_1 et x_2 forment une base de $\mathcal{E}$.
5. On désigne par $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ la matrice de l'endomorphisme τ de $\mathcal{E}$ dans la base (x_1, x_2) .

- (a) Calculer les coefficients m_{ij} de M en fonction de $x_i(T)$, $x'_i(T)$, ($i = 1, 2$).
- (b) Évaluer $\det M$.
On pose $\Delta = \frac{1}{2}(x_1(T) + x'_2(T))$.
- (c) Évaluer Δ en fonction de $\text{Tr } M$, trace de M .
6. (a) Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme τ de $\mathcal{E}$ sont racines du trinôme $P(\rho) = \rho^2 - 2\Delta\rho + 1$.
- (b) Soit $x \in \mathcal{E}$, non nul, et $\rho \in \mathbb{C}$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes
- (i) x est un vecteur propre de τ pour la valeur propre ρ
 - (ii) $\forall t \in \mathbb{R}, x(t+T) = \rho x(t)$
 - (iii) $x(T) = \rho x(0)$ et $x'(T) = \rho x'(0)$
- Soit $x \in \mathcal{E}$. On dit que x est *stable* si $|x|$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. On dit que x est *fortement stable* si $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.
7. On suppose Δ réel et $|\Delta| \neq 1$.
- (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est somme directe des sous-espaces propres de τ .
 - (b) Montrer que, si $|\Delta| < 1$, toutes les solutions de (1) sont stables. Les fonctions propres de τ sont-elles fortement stables dans ce cas ?
 - (c) Montrer que, si $|\Delta| > 1$, il existe une solution de (1) fortement stable. Est-elle unique ? Existe-t-il dans ce cas des solutions stables mais non fortement stables ?
8. On suppose que $\Delta = \varepsilon$, où $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$.
- (a) Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{E}$ dans laquelle la matrice de τ est $\begin{pmatrix} \varepsilon & a \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ où a est un nombre complexe.
 - (b) On suppose $a \neq 0$. Montrer que, dans ce cas, il existe une solution de (1) stable mais non fortement stable. Existe-t-il des solutions fortement stables ?

Deuxième partie

Dans cette partie, on fixe $T = \pi$ et l'on suppose λ réel. Pour indiquer la dépendance par rapport au paramètre λ et au choix de la fonction q , on note $\Delta_q(\lambda)$ la quantité Δ définie à la question 5.

9. Dans cette question, on choisit q identiquement nulle, $q = 0$.
- (a) Calculer $\Delta_0(\lambda)$ en distinguant les cas suivant le signe de λ . La fonction $\lambda \mapsto \Delta_0(\lambda)$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?
 - (b) Tracer le graphe de la fonction $\lambda \mapsto \Delta_0(\lambda)$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - (c) Déterminer la matrice M lorsque $q = 0$ et $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.
- On va maintenant montrer que $\Delta_q(\lambda)$ est proche de $\Delta_0(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$. On suppose $\lambda > 0$ et on pose $\omega = \sqrt{\lambda}$. On note Q le maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $|q|$.

On pose $u_0(t, \omega) = \cos(\omega t)$, $v_0(t, \omega) = \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$ et l'on définit par récurrence

$$u_n(t, \omega) = \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) u_{n-1}(s, \omega) ds, \quad n \geq 1,$$

$$v_n(t, \omega) = \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) v_{n-1}(s, \omega) ds, \quad n \geq 1.$$

10. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, |u_n(t, \omega)| \leq \frac{Q^n |t|^n}{\omega^n n!} \quad \text{et} \quad |v_n(t, \omega)| \leq \frac{Q^n |t|^n}{\omega^{n+1} n!}.$$

11. On pose

$$X_1(t, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, \omega) \text{ et } X_2(t, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t, \omega)$$

Le paramètre ω étant fixé, montrer que l'on définit ainsi des fonctions continues de la variable $t \in \mathbb{R}$.

12. On note u'_n et v'_n les dérivées par rapport à t de u_n et v_n .

(a) Montrer que, pour $n \geq 1$

$$\forall t \in \mathbb{R}, |u'_n(t, \omega)| \leq \frac{Q^n |t|^n}{\omega^{n-1} n!} \text{ et } |v'_n(t, \omega)| \leq \frac{Q^n |t|^n}{\omega^n n!}.$$

(b) En déduire que X_1 et X_2 sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de la variable t .

13. Montrer que X_1 et X_2 satisfont les équations

$$\begin{aligned} X_1(t, \omega) &= \cos(\omega t) + \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) X_1(s, \omega) ds, \\ X_2(t, \omega) &= \frac{\sin(\omega t)}{\omega} + \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) X_2(s, \omega) ds. \end{aligned}$$

14. (a) Montrer que X_1 et X_2 sont solutions de (1) pour $\lambda = \omega^2$.

(b) Montrer que, si $\lambda > 0$, $\lambda = \omega^2$,

$$\Delta_q(\lambda) = \frac{1}{2} (X_1(\pi, \omega) + X_2'(\pi, \omega)).$$

15. Montrer que, pour $\lambda > 0$,

$$|\Delta_q(\lambda) - \Delta_0(\lambda)| \leq \exp\left(\frac{\pi Q}{\sqrt{\lambda}}\right) - 1$$

16. Dans cette question, on suppose de plus que $\int_0^\pi q(t) dt = 0$.

(a) Montrer que

$$u_1(\pi, \omega) + v_1'(\pi, \omega) = 0.$$

(b) En déduire que, pour $\lambda \rightarrow +\infty$,

$$\Delta_q(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

17. On appelle intervalle d'instabilité un intervalle de $\mathbb{R}_+$ sur lequel $|\Delta_q(\lambda)| > 1$. Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, il existe $\lambda_0 > 0$ assez grand pour que tout intervalle d'instabilité contenu dans $[\lambda_0, +\infty[$ soit contenu dans un intervalle $[(n-\alpha)^2, (n+\alpha)^2]$, pour un entier n . Que peut-on dire de la position des intervalles d'instabilité quand $\lambda \rightarrow +\infty$?

★ ★
★