PSI* 2024/25 DL 10

Graphe régulier d'excentricité constante 2

Notations

On note J_n la matrice carrée de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 et K_n la matrice colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est rapporté à la base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. On rappelle que le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ est défini par la formule suivante, pour deux vecteurs $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$:

$$< x|y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^\top Y,$$

en notant X la matrice colonne formée par les coordonnées (x_i) et Y celle formée par les coordonnées (y_i).

Objectifs

Calculatrices autorisées pour cette épreuve.

Le problème porte sur l'étude de matrices vérifiant une propriété (P). Cette propriété a un sens concret en théorie des graphes. On cherche les matrices d'adjacence pour un graphe G non orienté, tel que, depuis un sommet s donné,

- il y a toujours un nombre fixe δ de voisins (degré constant = graphe régulier)
- tous les autres sommets étant à distance 2 (excentricité constante),
- ainsi de s on joint tout sommet vec un arc de longueur 1 ou 2. On demande que cet arc soit unique (parmi les arcs de longueur 1 ou 2).

Dans la partie I, on fait établir des résultats sur une matrice particulière vérifiant la propriété (P). La partie II conduit, à travers l'étude des matrices vérifiant la propriété (P), à caractériser ces matrices à l'aide de matrices semblables.

Dans la partie III, on construit, à l'aide de produits scalaires, une matrice vérifiant la propriété (P).

Les trois parties sont indépendantes les unes des autres.

Travail demandé pour mercredi 15 janvier : parties I et II au moins SVP.

Partie I

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$.

I.1. Calculer la matrice M^2.

I.2. Exprimer la matrice $M^2 + M$ en fonction des matrices J_5 et I_5.

I.3. Exprimer la matrice J_5^2 en fonction de la matrice J_5.

I.4. Déduire des questions précédentes un polynôme annulateur de M.

I.5. Quelles sont les valeurs propres possibles de la matrice M ?

I.6. Une de ces valeurs possibles est un entier positif : montrer que c'est effectivement une valeur propre et déterminer le sous-espace propre associé.

I.7. Sans calcul, expliquer pourquoi M est diagonalisable. Sans nouvelle résolution de système, donner les valeurs propres de M et les dimensions des espaces propres.

Partie II

Dans cette partie n et δ sont des nombres entiers tels que $2 \leq \delta \leq n-1$. On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété (P) lorsqu'elle vérifie les quatre conditions suivantes :

(1) M est symétrique ($M^\top = M$).

(2) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $m_{i,i} = 0$.

(3) Chaque ligne de M comporte δ coefficients égaux à 1 et $n - \delta$ coefficients égaux à 0.

(4) Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, le coefficient $m_{i,j}$ est nul si et seulement si il existe un entier $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $m_{i,k} = m_{j,k} = 1$. Et dans ce cas, un tel entier k est unique.

On pourra utiliser sans justification une conséquence de la propriété (P) : si $m_{i,j} = 1$ alors pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$ on a $m_{i,k}m_{j,k} = 0$.

Soit $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que la matrice M vérifie la propriété (P).

II.1. Expression de M^2. On note $M^2 = (a_{i,j})$.

II.1.1. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, calculer les coefficients $a_{i,i}$.

II.1.2. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avc $i \neq j$, déterminer le coefficient $a_{i,j}$ selon la valeur de $m_{i,j}$.

II.1.3. Montrer que $M^2 = J_n - M + dI_n$ où d est un nombre entier que l'on déterminera.

Dans la suite, on note f (respectivement ϕ) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, de matrice M (respectivement de matrice J_n), relativement à la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.
Soit v le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice colonne des coordonnées relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est K_n.

II.2. Relation entre n et δ.

II.2.1. Déterminer $Im(\phi)$, l'image de l'application linéaire ϕ.

II.2.2. Soit u un vecteur du noyau de $f - \delta id$. En calculant $(f \circ f)(u)$, montrer que u est colinéaire à v.

II.2.3. Montrer que δ est une valeur propre de f et déterminer le sous-espace propre correspondant.

II.2.4. Déduire des questions précédentes l'égalité $n = \delta^2 + 1$.

II.3. Valeurs propres de f.

Dans la suite de cette question II.3, λ est une valeur propre de f avec $\lambda \neq \delta$ et $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. On rappelle que, comme M est une matrice symétrique réelle, il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f.

II.3.1. Montrer que des vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

II.3.2. Justifier l'égalité $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Que vaut $\phi(u)$?

II.3.3. Montrer que λ est racine de l'équation (E) : $x^2 + x + 1 - \delta = 0$.

II.3.4. On note a et b les deux racines de l'équation (E). On suppose qu'une seule de ces racines est valeur propre de f, par exemple a. En utilisant la trace de l'endomorphisme f, exprimer a en fonction de δ. En déduire une impossibilité.

Les deux racines a et b de l'équation (E) sont donc des valeurs propres de f. Dans la suite, on suppose $a > b$.

II.4. Relations portant sur r, s, a, b et δ.
On note r la dimension du noyau de $f - aid$ et s la dimension du noyau de $f - bid$.

II.4.1. Exprimer $(a-b)^2$ en fonction de δ.

II.4.2. Exprimer le produit matriciel $\begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ en fonction de δ.

II.4.3. En déduire $(r-s)(a-b)$ en fonction de δ.

II.4.4. Pour quelle valeur de δ a-t-on $r = s$? Que valent alors r et s ?

Dans la suite, on caractérise la matrice M par une matrice diagonale semblable à M.

II.5. Premier cas. On suppose $a - b \notin \mathbb{Q}$.

II.5.1. Montrer que $r = s$. En déduire δ et n.

II.5.2. Déterminer a et b et donner une matrice diagonale semblable à M.

II.6. Deuxième cas. On suppose que $a - b \in \mathbb{Q}$.

II.6.1. On écrit $a - b = \frac{m}{q}$ avec $m, q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que tout nombre premier qui divise q divise m. En déduire que $a - b \in \mathbb{N}$.

II.6.2. Montrer que $a-b$ est un entier impair supérieur ou égal à 3. En notant $a-b = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer δ en fonction de p. En déduire a et b en fonction de p.

II.6.3. On note $c = a - b$. Montrer que c divise $(c^2+3)(c^2-5)$. En déduire que $c \in \{3, 5, 15\}$.

II.6.4. Pour les différentes valeurs de c, donner le tableau des valeurs de δ, n, a, b, r et s.

Partie III

On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^5$ rapporté à la base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$.
On note $(u|w)$ le produit scalaire de deux vecteurs u et w de $\mathbb{R}^5$.
On considère tous les vecteurs u_i obtenus en ajoutant deux vecteurs distincts de $\mathcal{B}$: $u_i = e_\alpha + e_\beta$ avec $\alpha \neq \beta$.

III.1. Justifier que l'on définit ainsi 10 vecteurs u_i. On les indexe de façon arbitraire $u_i,\ i \in [\![1, 10]\!]$.

III.2. Calcul des produits scalaires $(u_i|u_j)$.

III.2.1. Pour $i \in [\![1, 10]\!]$, calculer $(u_i|u_i)$.

III.2.2. On suppose $u_i = e_\alpha + e_\beta$ et $u_j = e_\alpha + e_\gamma$ avec $\beta \neq \gamma$. Calculer $(u_i|u_j)$.

III.2.3. On suppose que $u_i : e_\alpha + e_\beta$ et que $u_j = e_\gamma + e_\epsilon$ avec les quatre indices $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ tous différents. Calculer $(u_i|u_j)$.

III.3. Soit ψ un endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ qui réalise une bijection de la base $\mathcal{B}$ sur elle même. Montrer que

$$\forall i, j \in [\![1, 10]\!],\ (u_i|u_j) = (\psi(u_i)|\psi(u_j))$$

III.4. Soit $A = (a_{i,j})$ avec $a_{i,j} = (u_i|u_j)$.

III.4.1. Ecrire une combinaison linéaire M de A, I_n et J_n susceptible de vérifier la propriété (P) définie dans la partie II.

III.4.2. Justifier que cette matrice M vérifie la propriété (P).

III.4.3. Ecrire entièrement M et dessiner le graphe correspondant à cette matrice d'adjacence.