PSI* 2021/22 DS 4a

Linéarisation d'une équation différentielle

Origine : réécriture d'un sujet X-ENS PC 2012.

Notations, définitions, rappels

Dans tout le sujet $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique noté $< \, , \, >$ et de la norme euclidienne assoicée, notée $\| \, \|$, c'est-à-dire pour

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ et } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad < x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ et } \|x\| = \sqrt{< x, x >}$$

L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble des matrices inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $Gl_n(\mathbb{R})$. La matrice identité de taille n est notée I_n.

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ deux fonctions. On note $f = \underset{+\infty}{o}(\varphi)$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in [M, +\infty[, \qquad |f(x)| < \varepsilon \varphi(x)$$

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$|||A||| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

Si $M : t \mapsto M(t)$ est une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $\int_a^b M(t)\,\mathrm{d}t$ la matrice obtenue en effectuant l'intégrale terme à terme, c'est-à-dire dont le terme d'indice i, j est égal à $\int_a^b M_{i,j}(t)\,\mathrm{d}t$.

Préliminaires

1. On établit quelques propriétés de $||| \; |||$ qui seront utiles par la suite.

a. Rappeler pourquoi pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la notation $|||A|||$ est bien définie.

b. Montrer que $||| \; |||$ forme une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Montrer aussi que pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$|||AB||| \leq |||A|||.|||B|||$$

2. Soient deux réels $a \leq b$. Soit $t \mapsto M(t)$ une fonction continue du segment $[a, b]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Justifier que

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{b-a}{p} \sum_{k=0}^{p-1} M\left(a + k\frac{b-a}{p}\right) = \int_a^b M(t)\,\mathrm{d}t$$

b. En déduire l'inégalité suivante (on justifiera que les différents termes sont bien définis) :

$$\left|\left|\left|\int_a^b M(t)\,\mathrm{d}t\right|\right|\right| \leq \int_a^b |||M(t)|||\,\mathrm{d}t$$

Première partie : le cas linéaire

Dans cette partie on fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on étudie, pour chaque $Y_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème

$$(L_{Y_0}) \begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

On définit l'application $\varphi_A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par la formule $\varphi_A(t, Y_0) = Y(t)$, où l'on note Y la fonction solution du problème (L_{Y_0}).

5. Montrer que pour $t_1 \in \mathbb{R}$ fixé, $Y_0 \mapsto \varphi_A(t_1, Y_0)$ est une application linéaire injective. En déduire qu'il existe $e_A : \mathbb{R} \mapsto Gl_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $(t, Y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\varphi_A(t, Y_0) = e_A(t)Y_0$.

6.

a) Montrer que e_A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e'_A(t) = Ae_A(t)$.

b) Montrer que $e_A(0) = \mathrm{I}_n$ et que pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, $e_A(t + s) = e_A(t)e_A(s) = e_A(s)e_A(t)$.

c) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e_A(-t) = (e_A(t))^{-1}$.

7.

a) Soit $P \in Gl_n(\mathbb{R})$. Montrer que $e_{P^{-1}AP}(t) = P^{-1}e_A(t)P$.

b) Montrer que si A est une matrice diagonale de coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ alors $e_A(t)$ est une matrice diagonale de coefficients $e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}$.

c) Dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calculer $e_A(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

8.

a) Soient α et β des constantes réelles positives. Soit $\phi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue qui vérifie

$$\forall t \in [0, +\infty[, \qquad \phi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \phi(s)\,\mathrm{d}s$$

Montrer que pour tout $t \in [0, +\infty[$ on a $\phi(t) \leq \alpha e^{\beta t}$.

Indication : on pourra étudier la fonction $F(t) = \left(\alpha + \beta \int_0^t \phi(s)\,\mathrm{d}s\right) e^{-\beta t}$.

b) Montrer que pour $t \in [0, +\infty[$, $|||e_A(t)||| \leq e^{t.|||A|||}$.

9. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction $\mathcal{C}^1$. Soit $Z_0 \in \mathbb{R}^n$. On considère le problème

$$(U) \begin{cases} Z'(t) = AZ(t) + g(t) \\ Z(0) = Z_0 \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$Z(t) = e_A(t)\left(Z_0 + \int_0^t e_A(-s)g(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

est bien défini et est la solution du problème (U).

b) Dans le cas d'une équation scalaire ($n = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$) $y' = \lambda y + g$, retrouver à partir de la question précédente l'expression classique des solutions.

10.

a) Soit $a > 0$. Soit $\lambda \in]-\infty, -a[$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-at})$. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie $y' = \lambda y + g$. Montrer que $y(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-at})$.

b) On suppose dans cette question que A est une matrice triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i < -a$. Montrer que pour tout $Y_0 \in \mathbb{R}^n$, la solution Y du problème (L_{Y_0}) vérifie $\|Y(t)\| \underset{+\infty}{=} o(e^{-at})$ (on vérifiera pour cela que chaque composante y_i de Y vérifie $y_i(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-at})$).

c) On suppose dans cette question que le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$. On suppose de plus que toutes les valeurs propres de A sont strictement négatives. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $|||e_A(t)||| \underset{+\infty}{=} o(e^{-at})$.

11. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 + \mathrm{I}_n = 0$.

a) Donner les valeurs propres complexes de A et montrer que n est pair.

b) Montrer que la fonction $t \mapsto |||e_A(t)|||$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Deuxième partie : linéarisation

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Dans cette partie on s'intéresse à la solution du problème non linéaire suivant

$$(S) \begin{cases} Y' = f(Y) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}, \qquad \text{pour un certain } Y_0 \in \mathbb{R}^2$$

On dit qu'une fonction Y est solution de (S) sur l'intervalle I quand

- $Y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$,
- $Y(0) = Y_0$
- **et** $\forall t \in I,\ Y'(t) = f(Y(t))$.

12. On suppose que Y est une solution de (S) sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. On suppose en outre que Y admet un vecteur limite en $+\infty$: $\lim\limits_{t \to +\infty} Y(t) = \ell \in \mathbb{R}^2$.

On va montrer que $f(\ell)$ est nulle, par l'absurde. On suppose donc $f(\ell) \neq 0$.

a. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall t \in [M, +\infty[, \qquad < Y'(t), f(\ell) > \geq \frac{1}{2}\|f(\ell)\|^2$$

b. Montrer que

$$\forall t \in [M, +\infty[, \qquad < Y(t), f(\ell) > \geq (t - M)\frac{\|f(\ell)\|^2}{2} + < Y(M), f(\ell) >$$

c. Conclure que $f(\ell) = 0$.

13. Dans cette question on suppose que f est donnée par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} z + \alpha y(y^2 + z^2) \\ -y + \alpha z(y^2 + z^2) \end{pmatrix} \end{array}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Dans le cas $\alpha = 0$, montrer qu'il existe une unique solution Y à (S) qui est définie sur $\mathbb{R}$ et la déterminer. Quelle est la nature de la courbe $t \mapsto Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$?

b. Si $Y : t \mapsto Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ est une fonction solution sur un intervalle I, jamais nulle sur cet intervalle, étudier les variations des fonctions $t \mapsto \|Y(t)\|^2$ et $t \mapsto \frac{1}{\|Y(t)\|^2}$.

c. On suppose $\alpha < 0$. On admet qu'il existe une solution Y définie sur $[0, +\infty[$. Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} Y(t) = 0$.

d. On suppose $\alpha > 0$ et $Y_0 \neq 0$ et on pose $T = \frac{1}{2\alpha\|Y_0\|^2}$. Montrer que s'il existe une solution Y définie sur $[0, T[$ alors $\lim\limits_{t\to T^-} \|Y(t)\| = +\infty$. En déduire qu'il ne peut exister des solutions que sur des intervalles inclus dans $]-\infty, T[$.

14. Dans cette question on suppose qu'il existe $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et dont les valeurs propres sont toutes strictement négatives. On suppose que $\|f(x) - Ax\| = o(\|x\|)$ quand x tend vers 0.

On suppose qu'il existe une solution Y de (S) définie sur $[0, +\infty[$.

a. Montrer qu'il existe $a > 0$ et $K \geq 0$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t > 0$, l'inégalité suivante

$$\|Y(t)\| \leq Ke^{-ta}\left(\|Y_0\| + \int_0^t e^{sa}\varepsilon\|Y(s)\|\,\mathrm{d}s\right)$$

est vraie dès que l'on a

$$\forall s \in [0, t], \|f(Y(s)) - AY(s)\| \leq \varepsilon\|Y(s)\|$$

b. En déduire qu'il existe $b > 0$, $\delta > 0$ et $C > 0$ tels que pour $Y_0 \in \mathbb{R}^2$ avec $\|Y_0\| \leq \delta$, on a

$$\forall t \in [0, +\infty[, \qquad \|Y(t)\| \leq Ce^{-bt}$$