

Etude spectrale d'un opérateur

Travail minimum demandé : partie 1 + partie 4 questions 13 à 17. Pour mercredi 29/1.

Soit V un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et T un endomorphisme de V : on dira que le complexe λ est une valeur propre de T s'il existe un élément f de V non nul tel que $Tf = \lambda f$.

Soit $\mathcal{C}_1^0$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont continues et 1-périodiques. Cet espace est normé par

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in \mathbb{R}\}$$

On désigne par e_0 la fonction constante égale à 1 sur tout $\mathbb{R}$ et par D le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_1^0$ engendré par e_0 . Si $f \in \mathcal{C}_1^0$, on définit

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right)$$

L'objet du problème [avant que je le bidouille, du moins] est l'étude des propriétés spectrales de diverses restrictions de T à des sous-espaces invariants de $\mathcal{C}_1^0$. On mettra en évidence sur certains de ces sous-espaces la propriété de "trou spectral" : il existe $0 < r < 1$ tel que les valeurs propres autres que 1 sont de module inférieur ou égal à r .

1. Utilisation de T pour établir une identité

- Montrer que si f appartient à $\mathcal{C}_1^0$ alors $T(f)$ aussi.
- Montrer que pour tout élément f de $\mathcal{C}_1^0$ on a l'inégalité $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ puis que

$$\sup_{\|f\|_\infty=1} \|T(f)\|_\infty = 1$$

- En déduire que les valeurs propres de T sont toutes de module inférieur à 1.
- Soit g la fonction donnée par $g(x) = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi x)} \right)^2$. Calculer $g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right)$ en fonction de $g(x)$. Peut-on dire que g est un vecteur propre de T ?
- On pose $f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2}$. Donner le domaine de définition de f_1 et montrer qu'elle est continue sur $] -1, 1[$.
- On pose $f(x) = f_1(x) + f_1(-x) + \frac{1}{x^2}$. Montrer que $f - g$ est une fonction 1-périodique qui se prolonge en une fonction $h \in \mathcal{C}_1^0$.
- Montrer que $T(h) = 2h$ et en déduire que $f = g$.
- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-2}{(x-n)^3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{(x+n)^3}$$

2. Un hyperplan stable

On appelle H° l'hyperplan de $\mathcal{C}_1^0$ des fonctions u telles que

$$\int_0^1 u(t) dt = 0$$

- Montrer que H° est stable par T .
- Expliciter la projection P sur D parallèlement à H° .

3. Fonctions trigonométriques.

Pour tout entier relatif k , on note $e_k(x) = e^{2i\pi kx}$ de sorte que e_k est continue et 1-périodique, c'est-à-dire que e_k appartient à $\mathcal{C}_1^0$. Pour tout entier n , on désigne par E_n le sous-espace de $\mathcal{C}_1^0$ engendré par $e_0, e_1, e_{-1}, \dots, e_n, e_{-n}$.

11. Déterminer $T(e_k)$ (respectivement $P(e_k)$) pour tout entier relatif k et en déduire que les espaces E_n sont T -stables (respectivement P -stables).

On note T_n (respectivement P_n) l'endomorphisme de E_n induit par T (respectivement par P).

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k l'unique entier tel que $2^{k-1} \leq n < 2^k$. Montrer pour tout entier $p \geq k$, l'identité suivante :

$$T_n^p = P_n$$

4. Fonctions höldériennes.

NB : la fonction " f " n'a rien à voir avec celle de la partie 1.

Soit $\alpha \in]0, 1[$. On appelle $\mathcal{C}^\alpha$ le sous-espace de $\mathcal{C}_1^0$ des fonctions f telles que

$$\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} / (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y \right\} \text{ soit majoré}$$

On admet qu'il s'agit d'un espace vectoriel. On notera alors

$$m_\alpha(f) = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} / (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y \right\}$$

et

$$\|f\|_\alpha = m_\alpha(f) + \|f\|_\infty$$

13. Montrer que pour tous les réels x et y ,

$$|e^{ix} - e^{iy}| \leq |x - y|$$

14. Montrer que $f \mapsto \|f\|_\alpha$ définit une norme sur $\mathcal{C}^\alpha$.

15. Montrer que $\mathcal{C}^\alpha$ est stable par T .

On notera T_α l'endomorphisme de $\mathcal{C}^\alpha$ induit par T .

16. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^\alpha$, $\|T_\alpha(f)\|_\alpha \leq \|f\|_\alpha$ puis que $\sup_{\|f\|_\alpha=1} \|T_\alpha(f)\|_\alpha = 1$.

Soit λ un nombre complexe de module strictement inférieur à 1. On pose, pour tout réel x ,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda^k e_{2^k}(x)$$

17. Montrer que la série de fonctions $\sum_k \lambda^k e_{2^k}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f_\lambda \in \mathcal{C}_1^0$ et que

$$T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda.$$

18. Soit maintenant λ tel que $|\lambda| \leq 2^{-\alpha}$ et deux réels x et y tels que

$$2^{-n-1} < |x - y| \leq 2^{-n}$$

En considérant séparément les sommes avec $k \leq n$ et $k > n$ dans la série ayant pour valeur $f_\lambda(x) - f_\lambda(y)$, montrer que $f_\lambda \in \mathcal{C}^\alpha$.

19. Montrer que T_α laisse stable $H^\alpha = H^0 \cap \mathcal{C}^\alpha$.

20. Soit $f \in \mathcal{C}_1^0$, montrer que

$$T^n(f)(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(k2^{-n} + x2^{-n})$$

21. Etablir, pour $f \in \mathcal{C}^\alpha$, l'inégalité suivante :

$$\sup_{x \in [0,1]} |T_\alpha^n(f)(x) - \int_0^1 f(t) dt| \leq m_\alpha(f) 2^{-n\alpha}$$

22. Montrer que si $f \in H^\alpha$ alors pour tout entier n , l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|T_\alpha^n(f)\|_\alpha \leq 2^{1-n\alpha} \|f\|_\alpha$$

23. En déduire que l'ensemble des valeurs propres de T_α est la réunion du singleton $\{1\}$ et du disque fermé de centre 0 et de rayon $2^{-\alpha}$ (phénomène de trou spectral).