PSI* 2024/25 DS 4

Endomorphismes échangeurs

Exercice (totalement indépendant)

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On note D l'endomorphisme de dérivation : pour $f \in E$, $D(f) = f'$. On note $F^{(k)} = D^k(f)$ pour la dérivée k-ième de $f \in E$, avec la convention $D^0 f = f$.

On admet le résultat suivant (Cauchy-Lipschitz) : si $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, l'équation différentielle scalaire d'ordre n

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}$$

admet un espace vectoriel solution $F_{a_0,\dots,a_{n-1}}$ de dimension n.

1. Quels sont les éléments propres de D ?

2. Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$; on suppose que le polynôme $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ admet des racines $\mu_1, \dots, \mu_n$ distinctes.

   a. Montrer que $F_{a_0,\dots,a_{n-1}}$ est stable par D.

   b. Justifier que D_F, endomorphisme induit par D sur cet espace, est diagonalisable.

   c. Décrire $F_{a_0,\dots,a_{n-1}}$ à l'aide des racines $\mu_1, \dots, \mu_n$ de P.

3. Soit G un sous-espace vectoriel de E de dimension finie d et stable par D. En introduisant D_G endomorphisme induit par D sur G, montrer qu'il existe $(a_0, \dots, a_{d-1})$ tels que $G = F_{a_0,\dots,a_{d-1}}$

Problème : endomorphismes échangeurs

Dans tout le problème, les espaces vectoriels considérés ont $\mathbb{C}$, le corps des complexes, pour corps de base.
Etant donnés deux entiers naturels n et p non nuls, on note $M_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{C}$ (et $0_{n,p}$ sa matrice nulle) et $M_n(\mathbb{C})$ celui des matrices carrées à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{C}$ (et 0_n sa matrice nulle).
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.
Un endomorphisme u de E est dit **échangeur** lorsqu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que

$$E = F \oplus G, \ \ u(F) \subset G \ \text{ et } \ u(G) \subset F$$

Etant donnés deux endomorphismes u et v de E, on dit que v est **semblable** à u lorsqu'il existe un automorphisme φ de E tel que $v = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$. On notera que dans ce cas $u = \varphi^{-1} \circ v \circ (\varphi^{-1})^{-1}$, si bien que u est semblable à v.
On dit que u est **de carré nul** lorsque u^2 est l'endomorphisme nul de E. On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que $u^n = 0$.
Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite **de carré nul** lorsque $A^2 = 0$.

L'objectif du problème est d'établir, pour un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, l'équivalence entre les conditions suivantes :

(C1) l'endomorphisme u est échangeur ;

(C2) il existe $a, b \in \mathcal{L}(E)$, tous deux de carré nul, tels que $u = a + b$;

(C3) les endomorphismes u et $-u$ sont semblables.

Chacune des parties A et B est indépendante des autres. Les résultats de la partie D sont essentiels au traitement des parties E et F. La partie G a été ajoutée au sujet original pour finir la preuve de l'équivalence ; elle est indépendante des autres parties.

A. Quelques considérations en dimension 2

On se donne ici un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension 2 et un endomorphisme u de E.

1. Montrer que si u vérifie la condition **(C3)** alors u est de trace nulle.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose u de trace nulle et de déterminant non nul.
On choisit un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = -\det(u)$.

2. Montrer que $u^2 = \delta^2 \mathrm{I}_E$, déterminer le spectre de u et préciser la dimension des sous-espaces propres.
3. Expliciter, à l'aide de vecteurs propres de u, une droite vectorielle D telle que $u(D) \not\subset D$ et en déduire que u est échangeur.

B. (C1) implique (C2) et (C3)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Soient $A \in M_{p,n}(\mathbb{C})$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$. On considère dans $M_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix}$$

4. Calculer le carré de la matrice $\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}$ de $M_{n+p}(\mathbb{C})$. Montrer ensuite que M est la somme de deux matrices de carré nul.
5. On considère dans $M_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale par blocs

$$D = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{pmatrix}$$

   Montrer que D est inversible, calculer D^{-1} puis DMD^{-1}, et en déduire que M est semblable à $-M$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on se donne un endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que u est échangeur et on se donne donc une décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces vectoriels vérifiant $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$.

6. On suppose ici F et G tous deux non nuls.
   On se donne une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de F et une base $(g_1, \ldots, g_p)$ de G.
   La famille $B = (f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_p)$ est donc une base de E.
   Compte-tenu des hypothèses, décrire la forme de la matrice u dans B.
7. Déduire des questions précédentes que u vérifie **(C2)***et***(C3)**. *On n'oubliera pas de considérer le cas où l'un des sous-espaces F ou G est nul.*

C. (C2) implique (C1) : cas d'un automorphisme

Dans cette partie, u désigne un automorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0$$

8. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = 0$. Comparer $\ker(f)$ à $\mathrm{Im}(f)$ et en déduire
$$\dim(\ker(f)) \geq \frac{1}{2}\dim(E)$$
9. Démontrer que $E = \ker(a) \oplus \ker(b)$, et que $\ker(a) = \mathrm{Im}(a)$ et $\ker(b) = \mathrm{Im}(b)$.
10. En déduire que u est échangeur.

D. Intermède : un principe de décomposition

On se donne dans cette partie un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, ainsi qu'un endomorphisme f de E. On se donne un nombre complexe arbitraire λ. On pose $v = f - \lambda \mathrm{I}_E$.

11. Montrer que la suite $(\ker(v^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.
12. Montrer qu'il existe un entier naturel p tel que
$$\forall k \geq p,\ \ker(v^k) = \ker(v^p)$$
On pourra introduire la plus grande dimension possible pour un sous-espace vectoriel de la forme $\ker(v^k)$ *pour* $k \in \mathbb{N}$.
Montrer qu'alors
$$\ker(v^p) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker(v^k)$$
et que p peut être choisi parmi les entiers pairs.

Dans la suite de cette partie, on fixe un entier naturel pair p donné par la question 12 et l'on pose
$$E^c_\lambda(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker(v^k) = \ker(v^p)$$
On notera que $E^c_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

13. Montrer que $E^c_\lambda(f) = \ker(v^{2p})$ et en déduire
$$E = E^c_\lambda(f) \oplus \mathrm{Im}(v^p)$$
Montrer en outre que les sous-espaces vectoriels $E^c_\lambda(f)$ et $\mathrm{Im}(v^p)$ sont tous deux stables par f.
14. Montrer que λ n'est pas valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}(v^p)$. Montrer que si $E^c_\lambda(f)$ n'est pas nul alors λ est l'unique valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $E^c_\lambda(f)$.
15. On se donne ici un nombre complexe $\mu \neq \lambda$. On suppose que toute valeur propre de f différente de λ est égale à μ.
Montrer que $\mathrm{Im}(v^p) \subset E^c_\mu(f)$, puis que $E = E^c_\lambda(f) \oplus E^c_\mu(f)$.
On pourra s'intéresser au polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par f *sur* $\mathrm{Im}(v^p)$.

E. (C2) implique (C1) : cas non bijectif

Dans cette partie, on admet la validité de l'énoncé suivant qui sera prouvé en partie G.

Théorème (T1) : tout endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie est échangeur.

On se donne ici un endomorphisme non bijectif u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que
$$u = a + b \text{ et } a^2 = b^2 = 0$$

16. Montrer que a et b commutent avec u^2.

On fixe maintenant un entier pair p tel que $E^c_0(u) = \ker(u^p)$, donné par la question 12.

17. Montrer que le sous-espace vectoriel $G = \mathrm{Im}(u^p)$ est stable par a et b et que les endomorphismes induits a_G et b_G sont de carré nul.
18. En déduire que u est échangeur. *On pourra utiliser, entre autres, le résultat final de la partie C.*

F. (C3) implique (C1)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.
Un endomorphisme u de E est dit **indécomposable** lorsque

(i) la condition **(C3)** est vérifiée par u

(ii) il n'existe aucune décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces non nuls, stables par u et tels que les endomorphismes induits u_F et u_G vérifient tous deux la condition **(C3)**.

Jusqu'à la question 21 incluse, on se donne un endomorphisme indécomposable u de E. On dispose en particulier d'un automorphisme φ de E tel que

$$-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$$

19. Montrer que φ^2 commute avec u.
20. Montrer que φ^2 possède une unique valeur propre λ. En déduire que les valeurs propres de φ sont parmi α et $-\alpha$, pour un certain nombre complexe non nul α.
    On utilisera l'indécomposabilité de u ainsi que les résultats des questions 13 et 14.
21. En déduire que u est échangeur.
    On pourra appliquer le résultat final de la question 15.
22. En déduire plus généralement que, pour tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, la condition **(C3)** implique la condition **(C1)**.

G. Tout endomorphisme nilpotent est échangeur

Cette partie a notamment pour but de démontrer le théorème T1 admis en partie E.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note N_k la matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ définie par

$$N_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

23. Montrer que l'endomorphisme canoniquement associé à N_k est un endomorphisme échangeur de $\mathbb{C}^k$.
    Dans la suite de cette partie, on note E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie d et u un endomorphisme nilpotent de E, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n = 0$. On suppose que n a été choisi minimal, de sorte que $u^{n-1} \neq 0$ (on dit alors que n est l'indice de nilpotence de u).

    On fixe un vecteur $x_1 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_1) \neq 0$. On note $x_2 = f(x_1), \dots, x_n = u^{n-1}(x_1)$ et $E_1 = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.
24. Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre. En déduire que $n \leq d$.
25. Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de E stable par u et que l'endomorphisme u_1 induit par u sur E_1 est échangeur.
    On complète $(x_1, \dots, x_n)$ en une base $(x_1, \dots, x_d)$ de E. On note enfin x_n^* l'application qui à $z \in E$ associe sa composante sur e_n dans cette base : $x_n^*(z) = z_n \in \mathbb{K}$.
26. Soit $F_1 = \{z \in E, \forall k \in \mathbb{N}, x_n^*(u^k(z)) = 0\}$. Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de E stable par u.
27. On note $\psi : z \mapsto (x_n^*(z), \dots, x_n^*(u^{n-1}(z)))$. Montrer que ψ est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}^n$ dont on précisera le noyau. En déduire que $E = E_1 \oplus F_1$.
28. Prouver le théorème T1.
29. En adaptant les résultats employés dans cette partie et dans la partie D, prouver le théorème de réduction de Jordan : tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie admet une matrice représentative diagonale par blocs $\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}$ chaque bloc J_i étant de la forme $J_i = \lambda_i \mathrm{I}_{k_i} + N_{k_i}$ pour un certain complexe λ_i et un certain entier $k_i > 0$. En déduire une preuve du théorème de Cayley Hamilton *(peut être que vous l'avez utilisé dans vos propres démos, mais on peut montrer que ce n'est en fait pas nécessaire).*