PSI* 2024/25 DL 12

Constantes de Lipschitz pour une suite orthonormale

Pour mercredi 5 février ; au moins la partie I.

Définitions et notations

On note $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0,1]$, à valeurs réelles. Pour f et g éléments de E, on pose $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui définit sur E un produit scalaire dont la norme associée est notée $\| \ \|$.

On dit qu'une suite $\Phi = (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est orthonormale si elle vérifie la condition

$$\forall (m,n)\in\mathbb{N}^2,\ (\Phi_m|\Phi_n) = \delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } m\neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$$

Soit Φ une suite orthonormale de E.

1) Si $n\in\mathbb{N}$, on désigne par V_Φ^n le sous-espace vectoriel de E engendré par les $\{\Phi_j, 0\le j\le n\}$, par Π_ϕ^n l'opérateur de projection orthogonale de E sur V_Φ^n et enfin par $d_\Phi^n(f)$ la distance de $f\in E$ à V_Φ^n.

2) On désigne par V_Φ le sous-espace vectoriel de E réunion des V_Φ^n : $V_\Phi = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} V_\Phi^n$

Par définition V_Φ est alors l'ensemble des éléments de E qui sont combinaison linéaire (finie) d'éléments de la famille, c'est-à-dire qui s'écrivent sous la forme $\sum\limits_{i=0}^{p}\lambda_i\Phi_i$ pour un certain entier p et certains réels $\lambda_0,\dots,\lambda_p$.

3) On dit que la suite orthonormale Φ est totale dans E si pour tout élément f de E il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V_Φ convergeant vers f (dans toute la suite, quand on parle de convergence pour des éléments de E, il s'agit de la norme $\| \ \|$).

Enfin pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1]$ on pose

$$C_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \sqrt{2}\cos(n\pi x) & \text{si } n > 0 \end{cases} \qquad S_n(x) = \sqrt{2}\sin((n+1)\pi x)$$

et on note $C = (C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La partie III n'utilise que la partie I et le résultat final de la partie II. La partie IV est indépendante des parties II et III, sauf pour la dernière question. Le devoir complet est très long.

Partie I - Généralités sur les suites orthonormales

I-A- Montrer que C et S sont des suites orthonormales de E.

I-B- Soit Φ une suite orthonormale de E, $n\in\mathbb{N}$ et $f\in E$.

I-B-1) Etablir la formule $\|f\|^2 = \left\|\Pi_\phi^n(f)\right\|^2 + \left[d_\phi^n(f)\right]^2$

I-B-2) Calculer $\sup\limits_{\|f\|=1} \left\|\Pi_\phi^n(f)\right\|$.

I-B-3) Expliciter $\Pi_\phi^n(f)$ dans la base $\{\Phi_j, 0 \leq j \leq n\}$.
En déduire que la série de terme général $(f|\Phi_k)^2$ est convergente et que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(f|\Phi_k)^2 \leq \|f\|^2$.

I-C- On suppose toujours que Φ est une suite orthonormale de E.

I-C-1) Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de V_Φ, convergeant dans E, et soit f la limite de cette suite.
a. Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$ donné, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}), n \geq N \Rightarrow \left\{f - \Pi_\phi^n(f) = f - f_k + \Pi_\phi^n(f_k - f)\right\}$$

b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\|\Pi_\phi^n(f) - f\right\| = 0$.

I-C-2) Démontrer alors l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
(i) Φ est totale dans E
(ii) $\forall f \in E,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left\|\Pi_\phi^n(f) - f\right\| = 0$.

I-C-3) On suppose de plus, **dans cette question seulement**, que Φ est totale dans E
Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$ expliciter $\|f\|^2$ et $\left[d_\Phi^n(f)\right]^2$ à l'aide des $(f|\Phi_k)$.

NB : Dans la suite du sujet on admet que la suite C est totale

Partie II - Fonctions lipschitziennes

On note I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Une fonction f définie sur I et à valeurs réelles est dite lipschitzienne sur I si elle vérifie la condition

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \forall (x,y) \in I^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$$

On notera $Lip(I,\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions réelles définies et lipschitziennes sur I.

II-A- Propriétés élémentaires

II-A-1) Vérifier que $Lip(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $C^0(I,\mathbb{R})$.
Le produit de deux éléments de $Lip(I,\mathbb{R})$ est-il toujours un élément de $Lip(I,\mathbb{R})$?
Si $f \in Lip(I,\mathbb{R})$, justifier l'existence du réel $k(f)$ défini par

$$k(f) = \sup\left\{\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|, (x,y) \in I^2, x \neq y\right\}$$

Ce réel sera appelé la constante de Lipschitz de f.

II-A-2) Si I est un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, vérifier que $Lip(I,\mathbb{R})$ est stable par le produit. Exhiber une fonction définie et continue sur $[0,1]$ mais non lispchitzienne sur ce même intervalle.

II-B- Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
Montrer que f est liposchitzienne sur I si et seulement si f' est bornée sur I ; exprimer dans ce cas la constante de Lipschitz de f à l'aide de f'.

II-C- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $Lip(I,\mathbb{R})$ qui converge simplement sur I vers une fonction f. On suppose de plus que l'ensemble des $\{k(f_n), n \in \mathbb{N}\}$ est borné.
Montrer que $f \in Lip(I,\mathbb{R})$.

II-D- Soit $g \in Lip([0,1],\mathbb{R})$ telle que $k(g) \leq 1$.

II-D-1) Montrer qu'il existe $\widehat{g} \in Lip(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $k(\widehat{g}) \leq 1$ et $\forall x \in [0,1], \widehat{g}(x) = g(x)$.

II-D-2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $g_n(x) = n\displaystyle\int_x^{x+\frac{1}{n}} \widehat{g}(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à dérivée bornée par 1. Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (= converge pour la norme $\| \|_\infty$) vers $\widehat{g}$ sur $\mathbb{R}$.

II-E- Dans cette question et la suivante on reprend les suites S et C du préambule.
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$

II-E-1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $(f|C_n)$ en fonction de $(f'|S_{n-1})$

II-E-2) Montrer que la série de terme général $n^2(f|C_n)^2$ est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(f|C_n)^2 \leq \frac{1}{\pi^2}\|f'\|^2$$

II-F- Soit $f \in Lip([0,1],\mathbb{R})$.

II-F-1) Montrer que la série de terme général $n^2(f|C_n)^2$ est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(f|C_n)^2 \leq \frac{1}{\pi^2}k(f)^2$$

On pourra se ramener au cas où $k(f) \leq 1$.

II-F-2) En déduire alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_C^{n-1}(f) \leq \frac{1}{n\pi}k(f)$.

Partie III - Constantes de Lipschitz d'une suite orthonormale

L'objectif est de montrer que la suite des constantes de Lipschitz des éléments d'une suite orthonormale de E est toujours minorée par une suite de la forme $(\Gamma.n)_{n\in\mathbb{N}}$ où Γ est une constante positive indépendante de la suite choisie dans E.

III-A- Soient $\Phi = (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\Psi = (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites orthonormales de E. Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad n + \sum_{j=0}^{m} d_\Phi^{n-1}(\Psi_j)^2 \geq m+1$$

et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{j=0}^{2n-1} d_\Phi^{n-1}(\Psi_j)^2 \geq n$$

III-B- On donne maintenant une suite $\Psi = (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthonormale de E. On suppose de plus que toutes les fonctions Ψ_n sont lipschitziennes sur $[0,1]$.

III-B-1) Montrer que $\forall n \geq 1, \qquad \displaystyle\sum_{j=0}^{2n-1} k(\Psi_j)^2 \geq \pi^2 n^3.$

III-B-2) Montrer que la suite $(k(\Psi_j))_{j\in\mathbb{N}}$ est non bornée.

III-B-3) Montrer que cette suite admet pour limite $+\infty$.

III-B-4) Trouver la valeur de $k(C_n)$.

III-B-5) Montrer qu'il existe un réel $\Gamma > 0$ vérifiant la propriété suivante : pour toute suite orthonormale $\Psi = (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions lischitziennes sur $[0,1]$, telle que la suite $k(\Psi_j)$ soit une suite croissante, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $k(\Psi_n) \geq \Gamma n$.
Ce résutat est dû à Rudin.