PSI* 2024/25 DL 13A

Spectre d'une somme de matrices symétriques

Sujet plus difficile. Travail demandé pour le 15 mars si possible : au moins la partie 1.

Dans ce problème, n est un entier positif. L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique $\langle .,. \rangle$ et de la norme euclidienne associée $||\,.\,||$; on l'identifie à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes à n coordonnées. Ainsi pour deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = x^\top y$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'algèbre des matrices $n \times n$ à coefficients réels et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices réelles symétriques . On notera $M^\top$ la matrice transposée de M et I_n la matrice identité. Par abus de notation on identifiera $\langle x, y \rangle$ au vecteur à une ligne et une colonne $x^\top y$.

Les coordonnées d'un n-uplet m de réels (considéré comme vecteur ligne) seront notées $m_1, \dots, m_n$.

Si m est un n-uplet de réels, $m^\downarrow$ est le n-uplet obtenu à partir de m par permutation de ses coordonnées de sorte que $m_1^\downarrow \geq m_2^\downarrow \geq \cdots \geq m_n^\downarrow$. Autrement dit il s'agit du n-uplet obtenu à partir de m en ordonnant dans l'ordre décroissant les coordonnées de m. Par exemple, si $m = (3, 2, -1, 6, 2, 9)$, $m^\downarrow = (9, 6, 3, 2, 2, -1)$.

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera appelé, comme à l'habitude, spectre de M. On notera $s^\downarrow$ l'application de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à une matrice M symétrique associe le n-uplet (appelé *spectre ordonné*) dont les coordonnées sont les éléments ordonnés dans l'ordre décroissant du spectre de M (répétés autant de fois que leur ordre de multiplicité). Ainsi, par exemple, si le spectre de la matrice $M \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R})$ vaut $\{-1, 3, 3, 7\}$, on a $s^\downarrow(M) = (7, 3, 3, -1)$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$||M|| = \sup_{||x||=1} ||Mx||.$$

On admet qu'il s'agit d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Première partie

1a. Rappeler pourquoi $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel et quelle est sa dimension. Pourquoi l'application $s^\downarrow$ est-elle bien définie sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$?

1b. L'application $s^\downarrow$ est-elle linéaire ? Justifier votre réponse.

1c. Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, exprimer $s^\downarrow(-M)$ en fonction des coordonnées $(m_1, \dots, m_n)$ de $s^\downarrow(M)$.

1d. Soit $M = \begin{pmatrix} \lambda & h \\ h & \mu \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Calculer $s^\downarrow(M)$.

2a. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $m = s^\downarrow(M)$ son spectre ordonné. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$M = \sum_{i=1}^n m_i v_i v_i^\top.$$

Une telle décomposition de M sera appelée dans la suite *résolution spectrale* de M.

2b. Calculer

$$\sup_{||x||=1} \langle x, Mx\rangle$$

en fonction des coordonnées de m. Cette borne supérieure est-elle atteinte ?

2c. Les notations sont celles de la question **2a**. Soit j un entier, $1 \leq j \leq n$. On note $\mathcal{V}_j$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(v_1, \ldots, v_j)$. et $\mathcal{W}_j$ celui engendré par $(v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n)$. Montrer les égalités

$$\inf_{x\in\mathcal{V}_j,\, ||x||=1} \langle x, Mx\rangle = \sup_{x\in\mathcal{W}_j,\, ||x||=1} \langle x, Mx\rangle = m_j$$

3a. Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{V}) > n.$$

Montrer que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ ne se réduit pas à $\{0\}$.

3b. *Si vous séchez sur cette question, essayez d'utiliser les questions précédentes... et en fin de compte il y avait une indication dans le sujet d'origine, je l'ai mise tout à la fin de cet énoncé.*

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $m = s^{\downarrow}(M)$. Soit j un entier, $1 \leq j \leq n$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension j. Montrer que

$$\inf_{x\in\mathcal{V},\, ||x||=1} \langle x, Mx\rangle \leq m_j.$$

3c. En reprenant les notations de la question **3b.**, en déduire que :

$$\sup_{\mathcal{V}\subset\mathbb{R}^n,\, \dim\mathcal{V}=j} \left(\inf_{x\in\mathcal{V},\, ||x||=1} \langle x, Mx\rangle \right) = m_j.$$

Cette borne supérieure est-elle atteinte ?

4. Soient m et l deux n-uplets de réels. On note

$$l \preccurlyeq m \quad \text{si et seulement si, pour tout entier } j, 1 \leq j \leq n,\ \ell_j \leq m_j.$$

4a. *Cette fois pas d'indication dans le sujet d'origine... mais avec 1b, on voit au moins ce qu'on ne peut pas dire ou espérer... il faut donc trouver autre chose... sans doute à l'aide des questions résolues jusqu'ici !*

Soient $L, M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $(0, \ldots, 0) \preccurlyeq s^{\downarrow}(M - L)$. Montrer que $s^{\downarrow}(L) \preccurlyeq s^{\downarrow}(M)$.

4b. Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $(0, \ldots, 0) \preccurlyeq s^{\downarrow}(||M||I_n - M)$.

4c. *Question difficile, voir indication si besoin.* Soit $L, M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $m = s^{\downarrow}(M)$ et $l = s^{\downarrow}(L)$. Montrer que pour un entier $j \in [\![1, n]\!]$ fixé on a $\ell_j - m_j \leq ||L - M||$ puis

$$\max_{1\leq j\leq n} |\ell_j - m_j| \leq ||L - M||$$

4d. Conclure que la fonction $s^{\downarrow} : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ est continue.

5. On note $\mathcal{S}_n^{\dagger}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques $n \times n$ dont toutes les valeurs propres sont simples.

5a. On se place dans l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ muni de $\|\ \|$. Soit $M \in \mathcal{S}_n^{\dagger}(\mathbb{R})$. Déterminer un réel $r > 0$ tel que la boule ouverte centrée en M et de rayon r soit incluse dans $\mathcal{S}_n^{\dagger}(\mathbb{R})$. En déduire que $\mathcal{S}_n^{\dagger}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

5b. Montrer que la première composante $s_1^{\downarrow}$ de $s^{\downarrow}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}_2^{\dagger}(\mathbb{R})$ mais pas sur $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. (On pourra utiliser la question **1d**.)

Deuxième partie

Dans toute cette partie, on considère deux matrices symétriques réelles $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et leur somme $C = A + B$. On note $a = s^{\downarrow}(A)$, $b = s^{\downarrow}(B)$ et $c = s^{\downarrow}(C)$.

6a. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

6b. Montrer que $a_1 + b_1 \geq c_1$.

6c. Montrer que $a_n + b_n \leq c_n$.

7a. Soient $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W} > 2n$$

Montrer que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ ne se réduit pas à $\{0\}$.

7b. En utilisant des résolutions spectrales de A, B et C, montrer que si les entiers strictement positifs j et k vérifient $j + k \leq n + 1$, on a

$$c_{j+k-1} \leq a_j + b_k.$$

En déduire pour tout entier j, $1 \leq j \leq n$,

$$a_j + b_n \leq c_j.$$

8. On note A_{ii} pour $1 \leq i \leq n$ les éléments diagonaux de A.

8a. Démontrer que $A_{11} \leq a_1$.

8b. Soient j et k des entiers positifs tels que $1 \leq j < k$ et $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k$ des réels. On définit $\mathcal{D}_{j,k} = \{(t_1, \ldots, t_k) \in [0,1]^k \,|\, t_1 + \ldots t_k = j\}$ et f la fonction de $\mathcal{D}_{j,k}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{i=1}^{k} s_i t_i.$$

Démontrer que pour tout $(t_1, \ldots, t_k) \in \mathcal{D}_{j,k}$,

$$\sum_{i=1}^{j} s_i - f(t_1, \ldots, t_k) \geq \sum_{i=1}^{j} (s_i - s_j)(1 - t_i).$$

En déduire que

$$\sup_{\mathcal{D}_{j,k}} f = \sum_{i=1}^{j} s_i.$$

8c. Montrer que, plus généralement qu'en **8a**, on a pour tout entier $1 \leq j \leq n$

$$\sum_{i=1}^{j} A_{ii} \leq \sum_{i=1}^{j} a_i.$$

8d. En déduire que pour tout entier $1 \leq j \leq n$

$$\sum_{i=1}^{j} a_i = \sup_{(x_1,\ldots,x_j) \in \mathcal{R}_j} \sum_{i=1}^{j} \langle x_i, A x_i \rangle,$$

où $\mathcal{R}_j$ est l'ensemble des familles orthonormales de cardinal j dans $\mathbb{R}^n$.

8e. En conclure que l'on a pour tout entier $1 \leq j \leq n$

$$\sum_{i=1}^{j} c_i \leq \sum_{i=1}^{j} a_i + \sum_{i=1}^{j} b_i.$$

Troisième partie

Dans toute cette partie, on étudie le cas $n = 2$. Pour deux réels u et v tels que $u \geq v$, on note :

$$S(u, v) = \left\{ M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \,|\, s^{\downarrow}(M) = \{u, v\} \right\}.$$

On fixe $a_1 \geq a_2$ et $b_1 \geq b_2$, quatre réels vérifiant la relation

$$a_1 - a_2 \geq b_1 - b_2.$$

On cherche à identifier l'ensemble

$$\Sigma = \{s^{\downarrow}(A+B) \mid A \in S(a_1, a_2),\ B \in S(b_1, b_2)\},$$

autrement dit l'ensemble des spectres possibles de somme de deux matrices symétriques réelles de spectres respectifs donnés.

9. Montrer que Σ est inclus dans un segment de droite L de longueur $\sqrt{2}(b_1 - b_2)$, et dont on précisera les extrémités. On pourra étudier d'abord le cas où A et B sont diagonales.

10a. Montrer que

$$\Sigma = \left\{ s^{\downarrow}(A+B) \mid A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix},\ B \in S(b_1, b_2) \right\}.$$

10b. Déterminer une fonction continue définie sur $[-\pi, \pi]$ dont l'image vaut $S(b_1, b_2)$.

10c. Montrer que $\Sigma = L$.

Indications dans le sujet original ou indications supplémentaires

3b. On pourra utiliser les questions **2c** et **3a**, en choisissant $\mathcal{U} = \mathcal{W}_j$.

4c. Bien noter qu'on doit majorer $\ell_j - m_j$ sans valeur absolue. Pour cela, utiliser des expressions du type 2c.