PSI* 2024/25 DL 13B

Fonctions matriciellement croissantes

Sujet plus accessible. Travail demandé pour le 17 mars si possible : au moins jusqu'à la question 13.

On désignera dans tout le problème par :

- $\mathcal{M}_{n,p}$ l'espace des matrices réelles à n lignes et p colonnes. On note $0_{n,p}$ la matrice nulle.
- $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre n. On note 0_n la matrice nulle.
- $M^\top$ la transposée d'une matrice M.
- $\mathcal{S}_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n$ constitué des matrices symétriques d'ordre n, c'est à dire les matrices A qui satisfont $A^\top = A$.
- I_n la matrice identité d'ordre n.
- $(X|Y)$ le produit scalaire de deux matrices colonnes.

On rappelle que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}$ et tout couple de matrices colonnes (X, Y) où $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}$, l'identité suivante est satisfaite :

$$(AX|Y) = (X|A^\top Y)$$

Définition 1. *Une matrice $A \in \mathcal{S}_n$ est dite positive lorsque pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}$, $(AX|X) \geq 0$. Une matrice $A \in \mathcal{S}_n$ est dite définie positive lorsque pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1} \setminus \{0_{n,1}\}$, $(AX|X) > 0$.*

Définition 2. *Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{S}_n$, on dit que A est plus petite que B pour l'ordre de Löwner, et on note $A \preceq B$, si la matrice $B - A$ est positive. On notera $A \prec B$ si $B - A$ est définie positive.*

On suppose dorénavant que A est une matrice symétrique réelle d'ordre n.

I. Matrices positives

1. Montrer que si A est positive, alors pour toute matrice réelle $M \in \mathcal{M}_{n,p}$, la matrice $M^\top AM$ est symétrique positive.
2. Montrer que toutes les puissances entières d'une matrice symétrique positive A sont positives.
3. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n$ est positive, respectivement définie positive, si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes positives, respectivement strictement positives.
4. Si A est définie positive, montrer qu'il existe une matrice C, symétrique définie positive telle que $C^2 = A$.
5. Si A et C sont symétriques définies positives et $C^2 = A$, montrer que, pour toute valeur propre λ de A, on a :

$$\ker(A - \lambda I_n) = \ker(C - \sqrt{\lambda} I_n)$$

6. En déduire que si A est définie positive, il existe une unique matrice symétrique définie positive C telle que $C^2 = A$ et que dans toute base orthonormale de vecteurs propres de A, la matrice C est diagonale.

   On notera désormais $C = A^{1/2}$.

7. On suppose A définie positive. Montrer que A est inversible et qu'il existe une unique matrice, notée $A^{-1/2}$, symétrique définie positive telle que $A^{-1/2}A^{-1/2} = A^{-1}$.
8. Prouver que $(A^{1/2})^{-1} = A^{-1/2}$.

II. Ordre de Löwner.

9. Montrer que l'ordre de Löwner est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n$.
10. Soit $B \in \mathcal{S}_n$ avec $A \preceq B$. Montrer que pour toute matrice réelle $C \in \mathcal{M}_{n,p}$, la relation $C^\top AC \preceq C^\top BC$ est vérifiée.
11. Montrer que si $I_n \preceq A$ alors A est inversible et $A^{-1} \preceq I_n$.
12. En déduire que si $0_n \prec A \preceq B$ alors B est inversible et $B^{-1} \preceq A^{-1}$.
13. Donner un système de conditions nécessaires et suffisantes portant sur les réels a, b et c pour que la matrice $D = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ soit positive.
14. On considère les deux matrices suivantes :
$$D = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Montrer qu'il existe des réels a et b de sorte que $0_n \preceq D \preceq B$ mais que $D^2 \npreceq B^2$.

III. Fonctions matriciellement croissantes.

Soit n un entier non nul et M une matrice diagonalisable à valeurs propres positives. Il existe donc une matrice diagonale Δ et une matrice inversible P telles que $M = P\Delta P^{-1}$. Notons $(\lambda_i, i = 1, \ldots, n)$ les valeurs propres de M répétées suivant leur multiplicité, qui sont les coefficients diagonaux de Δ.

Définition 3. *Si f est une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et Δ une matrice diagonale positive, on note $f(\Delta)$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont donnés par $f(\Delta)_{i,i} = f(\lambda_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$.*

15. On considère f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et l'on note $R = Pf(\Delta)P^{-1}$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ et λ un réel positif tels que $MX = \lambda X$. Calculer RX.
16. Montrer que, pour toutes matrices P et Q inversibles et toutes matrices diagonales Δ_P et Δ_Q de $\mathcal{M}_n$ telles que $M = P\Delta_P P^{-1} = Q\Delta_Q Q^{-1}$, on a :
$$Pf(\Delta_P)P^{-1} = Qf(\Delta_Q)Q^{-1}$$

Désormais, si M est une matrice diagonalisable à valeurs propres positives et $M = P\Delta P^{-1}$ est une diagonalisation de M, on définit $f(M)$ par
$$f(M) = Pf(\Delta)P^{-1}$$

Définition 4. *Une fonction f est dite matriciellement croissante sur $\mathbb{R}^+$ si pour tout $n \geq 1$ et tout couple (A, B) de matrices symétriques, l'implication suivante est satisfaite :*
$$0 \preceq A \preceq B \;\Rightarrow\; f(A) \preceq f(B)$$

Soit E l'ensemble des fonctions φ continues sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telles que $(s \mapsto s\varphi(s))$ soit intégrable sur $[0, 1]$ et φ soit intégrable sur $[1, +\infty[$. On définit une fonction $L_\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par :
$$L_\varphi(t) = \int_0^{+\infty} \frac{st}{1 + st}\varphi(s)\, ds$$

17. Pour $r \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_r(s) = s^{-r-1}$. Pour quelles valeurs de r a-t-on $\varphi_r \in E$? Exprimer alors, pour tout $t > 0$, $L_{\varphi_r}(t)$ en fonction de $L_{\varphi_r}(1)$.
18. Soit $s \geq 0$. On pose pour tout $t \geq 0$, $f_s(t) = 1 - \frac{1}{1+st}$. Exprimer $f_s(A)$ lorsque A est une matrice symétrique positive.
19. Montrer que f_s est matriciellement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
20. Pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n$ positive et toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, établir l'identité :
$$(L_\varphi(A)X|X) = \int_0^{+\infty} \varphi(s)(f_s(A)X|X)\, ds$$
21. Montrer que, pour toute $\varphi \in E$, l'application L_φ est matriciellement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
22. Soient A et B deux matrices symétriques telles que $0 \preceq A \preceq B$. Compte-tenu des questions précédentes, pour quelles valeurs du réel positif r pouvez-vous montrer que $A^r \preceq B^r$?