PSI* 2024/25 DS 6

Partie symétrique d'une matrice

Calculatrices autorisées

Origine : Centrale MP 2017.

Notations

Si n et p sont des entiers naturels non nuls, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et p colonnes et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
La transposée d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est notée $\mathrm{A}^\top$. On rappelle qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symétrique* si $\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}$ et qu'elle est dite *antisymétrique* si $\mathrm{A}^\top = -\mathrm{A}$.
Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques est noté $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Le groupe des matrices orthogonales à n lignes et n colonnes est noté $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
On note I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour toute matrice carrée $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{A}_s = \frac{1}{2}\left(\mathrm{A} + \mathrm{A}^\top\right)$ et $\mathrm{A}_a = \frac{1}{2}\left(\mathrm{A} - \mathrm{A}^\top\right)$. Ainsi, A_s est une matrice symétrique, A_a est une matrice antisymétrique et $\mathrm{A} = \mathrm{A}_s + \mathrm{A}_a$. On dit que A_s est la *partie symétrique* de A et que A_a est sa *partie antisymétrique.*
Pour $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A})$ le spectre réel de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres réelles de A.
Une matrice symétrique réelle est dite *positive* si ses valeurs propres sont positives et elle est dite *définie positive* si ses valeurs propres sont strictement positives.
On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Objectif

L'objectif du problème est d'étudier certaines propriétés des matrices réelles carrées dont la partie symétrique est définie positive.
La première partie apporte quelques résultats préliminaires.
La deuxième partie, où on caractérise la partie symétrique des matrices orthogonales, et la troisième partie, qui traite des matrices F$-$singulières, sont indépendantes entre elles mais emploient les résultats de la partie I.

I Résultats préliminaires

I.A - Distance de A à A_s

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique donné par $(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \mapsto \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^\top \mathrm{N})$ où Tr désigne la trace. On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne associée.

I.A.1) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser leur dimension (pas de justification attendue sur ce dernier point).

I.A.2) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que pour toute matrice $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\|\mathrm{A} - \mathrm{A}_s\|_2 \leqslant \|\mathrm{A} - \mathrm{S}\|_2$. Préciser à quelle condition sur $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, cette inégalité est une égalité. Quel résultat de cours a-t-on retrouvé ?

I.B - Valeurs propres de A_s et propriétés de A

Si $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $\mathrm{X}^\top \mathrm{MY}$ appartient à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et on convient de l'identifier au nombre réel égal à son unique coefficient.

I.B.1) Soit S une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \mathrm{X}^\top \mathrm{SX} \geqslant 0$ et que $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ \mathrm{X}^\top \mathrm{SX} > 0$.

I.B.2) *a*) Si T est une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, que vaut $\mathrm{X}^\top \mathrm{TX}$?

b) Que peut-on dire du spectre réel d'une matrice antisymétrique ?

c) Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique est toujours positif.

d) Montrer que le spectre complexe d'une matrice antisymétrique est inclus dans $i\mathbb{R}$.

• On considère $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on la décompose à nouveau sous la forme $\mathrm{A} = \mathrm{A}_s + \mathrm{A}_a$ et on cherche à relier les propriétés de ces différentes matrices.

I.B.3) *a*) Pour toute valeur propre réelle μ de A, montrer que $\min \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A}_s) \leqslant \mu \leqslant \max \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A}_s)$.

b) En déduire que si $\mathrm{A}_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors A est inversible.

I.B.4) On suppose que $\mathrm{A}_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'il existe une matrice B de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}_s$.

b) Montrer qu'il existe une matrice Q de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}_s)\det(\mathrm{I}_n + \mathrm{Q})$.

c) En déduire que $\det(\mathrm{A}) \geqslant \det(\mathrm{A}_s)$.

I.B.5) On suppose A inversible et, conformément aux notations du problème, $(\mathrm{A}^{-1})_s$ désigne la partie symétrique de l'inverse de A. Montrer que $(\det(\mathrm{A}))^2 \det\big((\mathrm{A}^{-1})_s\big) = \det(\mathrm{A}_s)$.

`On pourra considérer` $\mathrm{A}(\mathrm{A}^{-1})_s\mathrm{A}^\top$.

II - Partie symétrique des matrices orthogonales

II.A.1) Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les valeurs propres de A_s sont dans $[-1, 1]$. *On pourra à nouveau s'intéresser à une expression de la forme* $\mathrm{X}^\top \mathrm{AX}$.

II.A.2) Rappeler la liste des éléments de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$. Donner un exemple de matrice symétrique S dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{S}) \subset [-1, 1]$ et pour laquelle il n'existe pas de matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{A}_s = \mathrm{S}$.

II.B.1) Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ n'ayant aucune valeur propre réelle. Montrer qu'il existe un plan $\mathrm{P} \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ stable par l'endomorphisme canoniquement associé à A.

On pourra construire un tel plan (réel) en partant d'un vecteur propre complexe de A.

II.B.2) Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $\mathrm{P}^\top \mathrm{AP}$ est de la forme diagonale par blocs suivante (avec $r \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{N}$, $(\theta_1, \ldots, \theta_t) \in]0, \pi[^t$)

$$\mathrm{P}^\top \mathrm{AP} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & & & & \\ & -\mathrm{I}_s & & & \\ & & \mathrm{R}_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathrm{R}_{\theta_t} \end{pmatrix}, \qquad \text{où l'on note } \mathrm{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

II.C.1.) Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{S}) \subset [-1, 1]$ et que pour toute valeur propre λ de S dans $]-1, 1[$, l'espace propre de S associé à λ est de dimension paire. Montrer qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}_s = \mathrm{S}$.

II.C.2.) Réciproquement, montrer que s'il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}_s = \mathrm{S}$, alors $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{S}) \subset [-1, 1]$ et pour toute valeur propre λ de S dans $]-1, 1[$, l'espace propre de S associé à λ est de dimension paire.

III Matrices F−singulières

Dans la suite de cette partie, on note $\mathrm{E}_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qu'on munit du produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ défini par

$$\forall \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{E}_n,\ (\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}) = \mathrm{X}^\top \mathrm{Y}$$

où, comme au I.B.1, on identifie la matrice $\mathrm{X}^\top \mathrm{Y}$ à son unique coefficient.
Si $1 \leqslant p \leqslant n$, on note $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang égal à p.
Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *singulière* si elle n'est pas inversible.
Si F est un sous-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de E_n et si $\mathrm{K} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que K est F−*singulière* s'il existe $\mathrm{X} \in \mathrm{F}$ non nul tel que $\forall \mathrm{Z} \in \mathrm{F},\ \mathrm{Z}^\top \mathrm{K}\mathrm{X} = 0$. Dans le cas contraire, on dit que K est F−*régulière*.

III.A - Cas où F est un hyperplan

III.A.1) Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est singulière si et seulement si elle est E_n−singulière.

Dans cette sous-partie III.A, on suppose désormais $n \geqslant 2$. Soit $\mathrm{F} = \mathrm{H}$ un hyperplan de E_n et soit $\mathrm{N} \in \mathrm{E}_n$ un vecteur unitaire normal à H.

III.A.2) Montrer que A est H−singulière si et seulement s'il existe un vecteur non nul X de H et un réel λ tels que $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{N}$.

III.A.3) En déduire que A est H−singulière si et seulement si la matrice $\mathrm{A}_\mathrm{N} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{N} \\ \mathrm{N}^\top & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathrm{R})$ est singulière.

Dans les questions suivantes, A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.A.4) Montrer qu'il existe une matrice $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 \\ \mathrm{B}_3 & \mathrm{B}_4 \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{B}_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{B}_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \mathrm{B}_3 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $\mathrm{B}_4 \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ telle que : $\mathrm{A}_\mathrm{N}\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ \mathrm{N}^\top \mathrm{A}^{-1} & -\mathrm{N}^\top \mathrm{A}^{-1}\mathrm{N} \end{pmatrix}$.

III.A.5) En déduire que $\det(\mathrm{A}_\mathrm{N}) = -\mathrm{N}^\top \mathrm{A}^{-1}\mathrm{N} \det(\mathrm{A})$.

III.A.6) Montrer que si $\det\left((\mathrm{A}^{-1})_s\right) = 0$, alors il existe un hyperplan H de E_n tel que A est H−singulière.

III.A.7) En déduire que si $\det(\mathrm{A}_s) = 0$, alors il existe un hyperplan H de E_n tel que A est H−singulière.

III.A.8) On suppose que $\mathrm{A}_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que A est H−régulière pour tout hyperplan H de E_n.

III.B - Exemple

On traitera l'exemple

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}(\mu) = \begin{pmatrix} 2-\mu & -1 & \mu \\ -1 & 2-\mu & \mu-1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

III.B.1) Montrer que $\mathrm{A}(\mu)$ est inversible pour tout réel μ .

III.B.2) Calculer $\mathrm{A}(\mu)_s$ et montrer que $\mathrm{A}(\mu)_s$ est singulière pour $\mu = 1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$.

III.B.3) Déterminer un hyperplan H tel que A(1) soit H−singulière.

III.C - Cas où F est de dimension $n-2$

On suppose ici $n \geqslant 3$. Soit F un sous-espace vectoriel de E_n de dimension $n-2$. On considère $(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$ une base de $\mathrm{F}^\perp$ et on pose

$$\mathrm{N} = (\mathrm{N}_1\ \mathrm{N}_2) \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$$

III.C.1) Montrer que A est F−singulière si et seulement s'il existe un élément non nul X de F et deux réels λ_1, λ_2 tels que $\mathrm{AX} = \lambda_1\mathrm{N}_1 + \lambda_2\mathrm{N}_2$.

III.C.2) En déduire que A est F−singulière si et seulement si la matrice

$$\mathrm{A_N} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{N_1} & \mathrm{N_2} \\ \mathrm{N_1}^\top & 0 & 0 \\ \mathrm{N_2}^\top & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{N} \\ \mathrm{N}^\top & 0_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$$

est singulière.

Dans les questions suivantes, A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.C.3) Montrer qu'il existe une matrice $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{B_1} & \mathrm{B_2} \\ \mathrm{B_3} & \mathrm{B_4} \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{B_1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{B_2} \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R}), \mathrm{B_3} \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathrm{R})$ et $\mathrm{B_4} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\mathrm{A_N B} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ \mathrm{N}^\top \mathrm{A}^{-1} & -\mathrm{N}^\top \mathrm{A}^{-1}\mathrm{N} \end{pmatrix}$$

III.C.4) En déduire que $\det(\mathrm{A_N}) = \det(\mathrm{N}^\top \mathrm{A}^{-1}\mathrm{N})\det(\mathrm{A})$.

III.C.5) Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{G}_{n,2}(\mathbb{R})$ telle que $\det(\mathrm{P}^\top \mathrm{A}^{-1}\mathrm{P}) = 0$ si et seulement s'il existe $\mathrm{P}' \in \mathcal{G}_{n,2}(\mathbb{R})$ telle que $\det(\mathrm{P'}^\top \mathrm{AP'}) = 0$.

III.C.6) Montrer que si $\mathrm{N}' = (\mathrm{N}_1' \ \mathrm{N}_2')$ alors

$$\det(\mathrm{N'}^\top \mathrm{AN'}) = (\mathrm{N_1'}^\top \mathrm{A}_s \mathrm{N}_1')(\mathrm{N_2'}^\top \mathrm{A}_s \mathrm{N}_2') - (\mathrm{N_1'}^\top \mathrm{A}_s \mathrm{N}_2')^2 + (\mathrm{N_1'}^\top \mathrm{A}_a \mathrm{N}_2')^2$$

III.C.7) En déduire que si $\mathrm{A}_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\det(\mathrm{N}^\top \mathrm{A}^{-1}\mathrm{N}) > 0$.

III.C.8) En conclure que si $\mathrm{A}_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors A est F−régulière pour tout sous-espace vectoriel F de dimension $n-2$ de E_n.

III.D - Exemple

On reprend l'exemple de la sous-partie III.B avec $\mu = 1$.

III.D.1) Comment choisir $\mathrm{N}' = (\mathrm{N}_1' \ \mathrm{N}_2')$ de façon que $\det(\mathrm{N'}^\top \mathrm{AN'}) = 0$?

III.D.2) Déterminer un sous-espace vectoriel F de E_3 tel que $\dim \mathrm{F} = 1$ et tel que A(1) soit F−singulière.

III.E - Cas général

Soit F un sous-espace vectoriel de E_n de dimension $n-p$, où $1 \leqslant p \leqslant n-1$. On suppose toujours que A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.E.1) Montrer que A est F−singulière si $\det(\mathrm{N'}^\top \mathrm{AN'}) = 0$ pour une matrice $\mathrm{N}' \in \mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$ que l'on définira.

On suppose désormais que $\mathrm{A}_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

III.E.2) Montrer que si $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est non nul alors $\mathrm{X}^\top \mathrm{N'}^\top \mathrm{AN'X} > 0$.

III.E.3) En déduire que les valeurs propres réelles de $\mathrm{N'}^\top \mathrm{AN'}$ sont strictement positives.

III.E.4) En déduire que $\det(\mathrm{N'}^\top \mathrm{AN'}) > 0$.

III.E.5) En déduire que A est F−régulière pour tout sous-espace vectoriel $\mathrm{F} \neq \{0\}$ de E_n.