PSI* 2021/22 DL 2

Produits infinis - Série de restes

Problème 1 - série de restes

Lorsque la série numérique $\sum_{k\geq 1} u_k$ converge, on note $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ son reste d'ordre n.

1. **Egalité sur les restes**
   Soit $\sum_{k\geq 1} u_k$ une série convergente ; montrer pour $n \in \mathbb{N}$ la relation $\sum\limits_{k=0}^{n} R_k - \sum\limits_{k=1}^{n} k u_k = (n+1)R_n$
2. **Application à un calcul de série**
   Soit un complexe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < 1$, montrer à l'aide de la question précédente la convergence de la série $\sum kz^k$ et calculer la somme $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} kz^k$ de cette série.
3. **Cas d'une série à termes positifs**
   On suppose de plus que $u_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que la convergence de la série $\sum\limits_{k\geq 0} R_k$ entraîne la convergence de la série $\sum\limits_{k\geq 1} k u_k$.
   (b) On suppose que la série $\sum\limits_{k\geq 1} k u_k$ est convergente ; quelle est la limite de la suite $(n+1)R_n$ lorsque n tend vers $+\infty$?
   (c) Déduire de ce qui précède que les séries $\sum\limits_{k\geq 1} k u_k$ et $\sum\limits_{k\geq 0} R_k$ sont de même nature, et, lorsqu'elles convergent, comparer leur somme.
4. **Application à la série $\sum \frac{1}{k^x}$**
   On suppose maintenant que $u_k(x) = \frac{1}{k^x}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D =]1, +\infty[$. On pose $\zeta(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$ pour $x \in D$.
   Préciser l'ensemble D_1 des $x \in D$ tels que la série $\sum\limits_{n\geq 0} R_n(x)$ soit convergente et exprimer, pour $x \in D_1$, la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} R_n(x)$ à l'aide de la fonction ζ.
5. **Généralisation de la formule**
   On suppose que la série $\sum_{k\geq 1} u_k$ est à termes réels, et toujours convergente. Montrer que la convergence absolue de la série $\sum\limits_{k\geq 1} k u_k$ entraîne la convergence de la série $\sum\limits_{k\geq 0} R_n$ et qu'alors il y a égalité des sommes de ces deux séries.

Problème 2 - produits infinis

Conventions et notations

Si n_0 est un entier naturel et si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite de réels non nuls, on lui associe la suite $(P_n)_{n\geq n_0}$ définie pour tout $n \geq n_0$ par $P_n = \prod\limits_{p=n_0}^{n} u_p = u_{n_0}u_{n_0+1}\dots u_n$.

On dit que le produit infini $\prod\limits_{n\geq n_0} u_n$, de terme général u_n, converge si la suite $(P_n)_{n\geq n_0}$ converge vers un nombre fini non nul. On notera alors $\prod\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ sa limite.

Si la suite $(P_n)_{n\geq n_0}$ n'admet pas de limite finie ou si elle converge vers 0, on dit que le produit infini $\prod\limits_{n\geq n_0}$ diverge.

Généralités et exemples

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels non nuls.

1. Montrer que, pour que le produit infini $\prod\limits_{n\geq 0} u_n$ converge, il est nécessaire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 1.

2. Montrer que, pour tout entier $n_0 > 0$, les produits infinis $\prod\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\prod\limits_{n\geq n_0} u_n$ sont de même nature.

3. On suppose dans cette question que le réel u_n est strictement positif pour tout entier n.

a. Montrer que le produit infini $\prod\limits_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq 0} \ln(u_n)$ converge.

b. Montrer que le produit infini $\prod\limits_{n\geq 0} (1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

c. Si de plus, pour tout entier naturel n, on a $0 < u_n < 1$, montrer que le produit infini $\prod\limits_{n\geq 0} (1-u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

4. Déterminer la nature des produits infinis suivants

a. $\prod\limits_{n\geq 1} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$.

b. $\prod\limits_{n\geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ pour x réel, $x \in]-\pi, \pi[$.

c. $\prod\limits_{n\geq 1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$ pour x réel, $x \in]0, +\infty[$.

5. On suppose que les réels u_n vérifient $u_n > -1$ pour tout entier n et sont tels que la série $\sum u_n$ converge. Déterminer la nature du produit $\prod\limits_{n\geq 0} (1+u_n)$ en fonction de la nature de la série $\sum u_n^2$.

Applications

6. Retrouver, en utilisant un produit infini que la série harmonique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

7. Une définition possible de la fonction Γ d'Euler est de poser, pour tout complexe z tel que $-z$ n'est pas un naturel ($z \in \mathbb{C}$ et $-z \notin \mathbb{N}$) :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}.$$

Justifier que le produit infini figurant au membre de droite converge.