PSI* 2019/20 DL 2

Etude du reste des séries de Riemann

L'objet de ce problème est de donner une approximation de la somme $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ d'une série de Riemann convergente. Pour cela, on étudie le reste :

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Dans la première partie, on donne une première approximation du reste. Cette méthode se généralisant mal, on utilise dans la deuxième partie une formule de Taylor pour obtenir simplement un développement asymptotique du reste. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne donne aucun contrôle de l'erreur.

Dans la troisième partie, on retrouve à partir de la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin le même développement asymptotique avec une expression de l'erreur assez satisfaisante. On a besoin dans cette partie d'une étude succincte des polynômes de Bernoulli.

Dans la dernière partie, on étudie de manière assez précise le contrôle de cette erreur, pour conclure que les formules sommatoires étudiées ne sont pas nécessairement convergentes.

Rappels et notations

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On note $v_n = O(u_n)$ si :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow |v_n| \leq M|u_n|$$

I Étude préliminaire

A Convergence des séries de Riemann

IA1. Soit f une fonction réelle, définie continue et décroissante sur $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$. Montrer, que pour tout entier $k \in [a+1, +\infty[$, on a

$$\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x)\,\mathrm{d}x$$

IA2. En déduire la nature de la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

En cas de convergence, on pose $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

IA3. Pour tout réel $\alpha > 1$, montrer que $1 \leq S(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$.

B Décomposition de l'exponentielle complexe

IB1. Montrer que pour tout complexe z la série de terme général $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge.

IB2. On fixe $z \in \mathbb{C}$. Ecrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n pour $\psi : t \mapsto e^{tz}$ sur l'intervalle $[0,1]$. En déduire

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

C Première étude asymptotique du reste

Dans la suite du problème, pour tout réel α strictement supérieur à 1 et pour tout entier naturel non nul n, on pose $R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

IC1. En utilisant l'encadrement de la question IA1, montrer que $R_n(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

IC2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$. En appliquant à f la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$$

où A_k est un réel vérifiant $0 \leq A_k \leq \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$.

IC3. En déduire que :

$$R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

On pourrait répéter le procédé pour obtenir un développement asymptotique plus précis de $R_n(\alpha)$, mais la partie suivante va nous donner une méthode plus rapide.

II Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

A Nombres de Bernoulli

IIA1. Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant la propriété suivante : pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout intervalle non réduit à un point I et pour toute fonction complexe f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, la fonction g définie par : $g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{p-1} f^{(p-1)}$ vérifie :

$$g' + \frac{1}{2!}g'' + \frac{1}{3!}g^{(3)} + \cdots + \frac{1}{p!}g^{(p)} = f' + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(p+l)}$$

où les $b_{l,p}$ sont des coefficients indépendants de f que l'on ne cherchera pas à calculer.

IIA2. Montrer que $a_0 = 1$ et que pour tout $p \geq 1$, $a_p = -\sum_{i=2}^{p+1} \dfrac{a_{p+1-i}}{i!}$.
En déduire que $|a_p| \leq 1$ pour tout entier naturel p. Déterminer a_1 et a_2.

IIA3.

a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, justifier que la série $\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p z^p$ est convergente.

On note $\varphi(z)$ sa somme : $\varphi(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p$.

b) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, calculer le produit $(\mathrm{e}^z - 1)\varphi(z)$.
En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $|z| < 1$, on a $\varphi(z) = \dfrac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$.

Dans la suite on admettra la propriété suivante : $a_{2k+1} = 0$ pour tout entier $k \geq 1$. C'est une conséquence de l'unicité de la décomposition en série entière que nous verrons ultérieurement.

Remarque : les nombres $b_n = n!a_n$ sont appelés nombres de Bernoulli (mais on utilise plutôt a_n ici).

B Formule de Taylor

Soit f la fonction défnie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$, où α est un réel strictement supérieur à 1.

Dans cette question IIB, on fixe un entier naturel non nul p et on note :

$$g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{2p-1} f^{(2p-1)}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $R(k) = g(k+1) - g(k) - f'(k)$ de sorte que :

$$g(k+1) - g(k) = f'(k) + R(k).$$

IIB1. En appliquant à g la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $2p$, montrer qu'il existe un réel A tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|R(k)| \leq Ak^{-(2p+\alpha)}$.

IIB2. En déduire le développement asymptotique du reste :

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = -\Big(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + a_4 f^{(4)}(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\Big) + O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$$

On obtient ainsi une valeur approchée de $S(\alpha)$ donnée par :

$$\tilde{S}_{n,2p-2}(\alpha) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} - \Big(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\Big)$$

IIB3. Donner le développement asymptotique de $R_n(3)$ correspondant au cas $\alpha = 3$ et $p = 3$.

III Polynômes de Bernoulli et formule d'Euler-Maclaurin

On peut calculer, pour $n = 100$:

$$\tilde{S}_{100,4}(3) = 1,202056903159594277\ldots$$

tandis que $S(3)$ vaut $1,202056903159594285\ldots$ (constante d'Apéry).

La méthode de la partie II semble satisfaisante, mais ne fournit pas d'information précise sur le terme $O\left(\dfrac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$.

C'est pourquoi on introduit dans cette partie les polynômes de Bernoulli et la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin.

A Polynômes de Bernoulli

On définit une suite de polynômes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} = (A_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes :

$$A_0 = 1,\ A'_{n+1} = A_n \text{ et } \int_0^1 A_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \qquad \text{(III.1.)}$$

Remarque : les polynômes $B_n = n!A_n$ sont appelés polynômes de Bernoulli.

IIIA1. Propriétés élémentaires.

a) Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est déterminée de façon unique par les conditions (III.1.) ; préciser le degré de A_n ; calculer A_1, A_2 et A_3.

b) Montrer que $A_n(t) = (-1)^n A_n(1-t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

c) Pour tout entier $n \geq 2$, montrer que $A_n(0) = A_n(1)$ et que $A_{2n-1}(0) = 0$.

d) On pose provisoirement $c_n = A_n(0)$ pour tout entier naturel n.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n(X) = c_0 \frac{X^n}{n!} + \cdots + c_{n-2}\frac{X^2}{2!} + c_{n-1}X + c_n$$

puis que, si $n \geq 1$,

$$\frac{c_0}{(n+1)!} + \cdots + \frac{c_{n-2}}{3!} + \frac{c_{n-1}}{2!} + c_n = 0$$

e) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en fait $c_n = a_n$.

IIIA2. Fonction génératrice.
Question hors programme du DM (séries entières). On admet donc , pour tout entier naturel n :

$$A_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right) a_n.$$

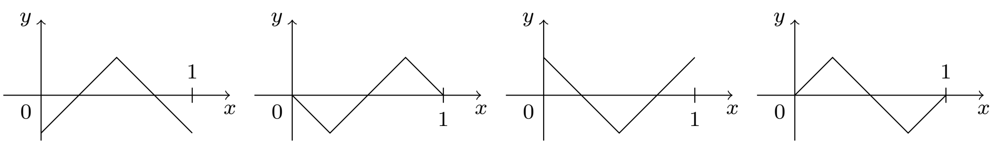
Pour mémoire, pour ceux qui veulent connaître les grandes lignes de la démarche : on construit la série $f(t,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t) z^n$; elle converge pour tout réel $t \in [-1,1]$ et tout complexe z vérifiant $|z| < 1$.
On justifie qu'il est possible de dériver par rapport à t, et on en déduit la formule

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t) z^n = \frac{z\mathrm{e}^{tz}}{\mathrm{e}^z - 1}$$

dont la propriété admise est une conséquence.

IIIA3. Variations des polynômes de Bernoulli.
On établit ici une majoration des polynômes de Bernoulli sur $[0,1]$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, les variations des polynômes A_n sur $[0,1]$ correspondent schématiquement aux quatre cas ci-dessous :



$n \equiv 0 \mod 4$ $\quad$ $n \equiv 1 \mod 4$ $\quad$ $n \equiv 2 \mod 4$ $\quad$ $n \equiv 3 \mod 4$

En d'autres termes, pour $n \geq 2$, on a :
- Si $n \equiv 2 \mod 4$, alors $A_n(0) = A_n(1) > 0 > A_n(\frac{1}{2})$; de plus la fonction A_n est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.
- Si $n \equiv 0 \mod 4$, alors $A_n(0) = A_n(1) < 0 < A_n(\frac{1}{2})$; de plus la fonction A_n est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.
- Si $n \equiv 1 \mod 4$, alors $A_n(0) = A_n(\frac{1}{2}) = A_n(1) = 0$; de plus $A_n < 0$ sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $A_n > 0$ sur $]\frac{1}{2}, 1[$.
- Si $n \equiv 3 \mod 4$, alors $A_n(0) = A_n(\frac{1}{2}) = A_n(1) = 0$; de plus $A_n > 0$ sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $A_n < 0$ sur $]\frac{1}{2}, 1[$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, montrer que $|A_{2n}(x)| \leq |a_{2n}|$ et $|A_{2n+1}(x)| \leq \dfrac{|a_{2n}|}{2}$.

B Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

IIIB1. Soit f une fonction complexe de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$.

a) Montrer que pour tout entier $q \geq 1$:

$$f(1) - f(0) = \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1} \left[A_j(t) f^{(j)}(t)\right]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

b) En tenant compte des relations trouvées dans la partie précédente, montrer que pour tout entier naturel impair $q = 2p+1$:

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2}(f'(0) + f'(1)) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\left(f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0)\right) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

IIIB2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[n, +\infty[$. On suppose que f et toutes ses dérivées sont de signe constant sur $[n, +\infty[$ et tendent vers 0 en $+\infty$.

En appliquant, pour $k \geq n$, le résultat précédent à $f_k(t) = f(k+t)$, montrer :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

où on a posé $A^*_j(t) = A_j(t - \lfloor t \rfloor)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Montrer que :

$$\left|\int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left|\frac{a_{2p}}{2}\right| \left|f^{(2p+1)}(n)\right|$$

IIIB3. Montrer que, dans l'expression de $R_n(\alpha)$ du IIB2, le terme $\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$ peut s'écrire sous la forme d'une intégrale.

IV Compléments sur l'erreur

Dans cette partie, on fixe un réel $\alpha > 1$ et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$$

A Encadrement de l'erreur

IVA1. Soit g une fonction continue croissante sur $[0, 1]$.

En remarquant $\displaystyle\int_0^1 = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1$, montrer que :

— si $n \equiv 1 \mod 4$, alors $\displaystyle\int_0^1 A_n(t) g(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$;

— si $n \equiv 3 \mod 4$, alors $\displaystyle\int_0^1 A_n(t) g(t)\,\mathrm{d}t \leq 0$.

IVA2. En reprenant les notations de IIB2, montrer que pour tout entier naturel $p \geq 1$:

$$\tilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leq S(\alpha) \leq \tilde{S}_{n,4p+2}(\alpha)$$

et que

$$\tilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leq S(\alpha) \leq \tilde{S}_{n,4p-2}(\alpha)$$

En déduire que l'erreur $\left|S(\alpha) - \tilde{S}_{n,2p}(\alpha)\right|$ est majorée par $\left|a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n)\right|$.

IVA3. Dans cette question, on reprend le cas de IIB3 Sachant que $6!a_6 = \frac{1}{42}$, retrouver que l'erreur $|S(3) - \tilde{S}_{100,4}(3)|$ est majorée par une expression de l'ordre de 10^{-17}.

B Séries de Fourier

Cette partie a été coupée (les séries de Fourier n'étant plus au programme) ; elle visait à établir le lien entre les $S(2p)$ et les a_{2p} :

$$a_{2p} = A_{2p}(0) = (-1)^{p+1}\frac{S(2p)}{2^{2p-1}\pi^{2p}}$$

ce qui fait que $S(2) = \frac{\pi^2}{6}, S(4) = \frac{\pi^4}{90}, \ldots$ sont connus de façon exacte. Ce sont les $S(2p+1)$ qu'on cherche donc à approcher. On admet cette formule.

C Comportement de l'erreur

IVC1. Montrer que, pour tous entiers $n, p \geq 1$:

$$\left|\frac{a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p} f^{(2p)}(n)}\right| = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2 S(2p)}$$

IVC2. Que dire de l'approximation de $S(\alpha)$ par $\tilde{S}_{n,2p}(\alpha)$ lorsque, n étant fixé, p tend vers $+\infty$? Pour le calcul numérique de $S(\alpha)$, comment doit-on choisir n et p ?