PSI* 2025/26 DL 2

Fonctions de Lambert

Objectifs
L'objet de ce problème est l'étude de différentes propriétés des fonctions de Lambert ainsi que leur application en probabilités.

Dépendance des parties
Les fonctions V et W définies dans la partie I sont utilisées dans les parties II, III et IV. Les parties II, III et IV sont indépendantes les unes des autres.

Travail demandé
Pour tous : les question Q1-Q10, Q21-34. Et plus si vous le voulez...

Notations
Pour des entiers k et n avec $0 \leq k \leq n$, le coefficient binomial « k parmi n » est noté $\binom{n}{k}$.
Lorsque $k \leq n$, $[\![k, n]\!]$ représente l'ensemble des nombres entiers compris, au sens large, entre k et n.

I - Fonctions de Lambert

Dans cette partie, on définit les fonctions de Lambert et on étudie certaines de leurs propriétés. On considère dans toute cette partie, l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^x \end{array} \right.$$

Q 1. Justifier que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $[-1, +\infty[$ sur l'intervalle $[-e^{-1}, +\infty[$.
Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée W.

Q 2. Justifier que W est continue sur $[-e^{-1}, +\infty[$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-e^{-1}, +\infty[$.

Q 3. Expliciter $W(0)$ et $W'(0)$.

Q 4. Déterminer un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \to 0$, ainsi qu'un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Q 5. Tracer, sur le même dessin, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_W$ représentatives des fonctions f et W. Préciser les tangentes aux deux courbes au point d'abscisse 0 ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_W$ au point d'abscisse $-e^{-1}$.

Q 6. **Question pour 5/2.** Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $x \longmapsto x^\alpha W(x)$ est-elle intégrable sur $]0, 1]$?

Q 7. Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $x \longmapsto x^\alpha W(x)$ est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?

Q 8. Démontrer que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty, -1]$ sur l'intervalle $[-e^{-1}, 0[$.
Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée V.

Q 9. Pour un paramètre réel m, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$xe^x = m \tag{I.1}$$

Déterminer, en fonction de m, le nombre de solutions de (I.1).
Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.

Q 10. Pour un paramètre réel m, on considère l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$xe^x \leq m \tag{I.2}$$

En utilisant les fonctions V et W, déterminer suivant les valeurs de m les solutions de (I.2).
Illustrer graphiquement les différents cas.

Q 11. Pour des paramètres réels non nuls a et b, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{ax} + bx = 0 \tag{I.3}$$

Déterminer, suivant les valeurs de a et b, le nombre de solutions de (I.3).
Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.

II - Probabilités

On étudie dans cette partie une situation dont la résolution fait intervenir les fonctions V et W définies dans la partie précédente. Les variables aléatoires considérées dans cette partie sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X sont notées, sous réserve d'existence, respectivement $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}[X]$.

Pour fidéliser sa clientèle, un commerçant organise une tombola permettant de gagner différents lots. Chaque client qui entre dans le magasin tire un billet de tombola. Chaque billet permet de gagner un lot avec la probabilité $p \in]0,1[$. On suppose que les tirages sont indépendants et on admet que le nombre N de billets distribués aux clients au cours d'une journée est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note X le nombre de billets gagnants tirés au cours d'une journée et on admet que X est également une variable aléatoire. Pour que l'opération soit rentable, le commerçant souhaite que la probabilité de gagner au moins deux lots durant la même journée soit faible. On considère donc un réel $\alpha \in]0,1[$ et on souhaite réaliser la condition

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha \tag{II.1}$$

Cependant, pour que l'opération intéresse les clients, le commerçant souhaite également que p soit le plus grand possible, tout en réalisant la condition (II.1).

Q 12. Démontrer que X suit une loi de Poisson de paramètre λp. Donner l'espérance et la variance de X.

Q 13. En utilisant l'inégalité de Markov, démontrer que si $p \leq 2\dfrac{1-\alpha}{\lambda}$ alors la condition (II.1) est satisfaite.

Q 14. On pose $x = -(\lambda p + 1)$. Démontrer que la condition (II.1) est équivalente à la condition

$$xe^x \leq -\alpha e^{-1}$$

Q 15. En utilisant l'une des fonctions V et W (définies dans la partie **I**) et la question **10**, discuter selon la position de λ par rapport à $-1 - V(-\alpha e^{-1})$ l'existence d'un plus grand réel $p \in]0,1[$ satisfaisant la condition (II.1).

Dans le sujet original il y avait une deuxième situation de proba traitée dans les question Q16 à Q20, mais avec beaucoup de redites.

III - Développement en série entière

Le but de cette partie est d'établir que la fonction W définie dans la partie **I** est développable en série entière et de préciser son développement ainsi que son rayon de convergence. Pour cela, on commence par établir un résultat de nature algébrique.

III.A - *Le théorème binomial d'Abel*

On considère dans cette partie un entier naturel n ainsi qu'un nombre complexe a. On définit une famille de polynômes $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ en posant

$$A_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad A_k = \frac{1}{k!}X(X - ka)^{k-1}$$

On note $\mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes et de degré inférieur ou égal à n.

Q 21. Démontrer que la famille $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q 22. Démontrer que pour tout $k \in]\!]1, n]\!]$, $\quad A_k'(X) = A_{k-1}(X-a)$

Q 23. En déduire, pour j et k éléments de $[\![0, n]\!]$, la valeur de $A_k^{(j)}(ja)$. On distinguera suivant que $j < k$, $j = k$ ou $j > k$. Soit P un élément de $\mathbb{C}_n[X]$ et soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des nombres complexes tels que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k$$

Q 24. Démontrer que, pour tout $j \in]\!]0, n]\!]$, $\quad \alpha_j = P^{(j)}(ja)$.

Q 25. En déduire l'identité binomiale d'Abel :

$$\forall\, (a, x, y) \in \mathbb{C}^3, \quad (x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(x-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}$$

Q 26. établir la relation,

$$\forall\, (a, y) \in \mathbb{C}^2, \quad ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}$$

III.B - *Développement en série entière de la fonction W*

On définit une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ en posant,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{(-n)^{n-1}}{n!}$$

On définit, lorsque c'est possible, $\quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

Q 27. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$.

Q 28. Justifier que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer $S^{(n)}(0)$ en fonction de n.

Q 29. Démontrer que la fonction S est définie et continue sur $[-R, R]$.

Q 30. Démontrer que,

$$\forall\, x \in]-R, R[, \quad x(1 + S(x))S'(x) = S(x)$$

`On pourra utiliser le résultat de la question 26.`

On considère la fonction $\quad h : \left| \begin{array}{ccc}]-R, R[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & S(x)e^{S(x)} \end{array} \right.$

Q 31. Démontrer que h est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle $xy' - y = 0$.

Q 32. Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = 0$ sur chacun des intervalles $]0, R[$, $]-R, 0[$, puis sur l'intervalle $]-R, R[$.

Q 33. En déduire que,

$$\forall\, x \in]-R, R[, \quad S(x) = W(x)$$

Q 34. Ce résultat reste-t-il vrai sur $[-R, R]$?

IV - Approximation de W

On définit dans cette partie une suite de fonctions $(w_n)_{n\geq 0}$ et on étudie sa convergence vers la fonction W définie dans la partie **I**.

Pour tout réel positif x, on considère la fonction Φ_x définie par

$$\Phi_x : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & x\exp(-x\exp(-t)) \end{array} \right.$$

et on définit, sur $\mathbb{R}_+$, une suite de fonctions $(w_n)_{n\geq 0}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad \left| \begin{array}{l} w_0(x) = 1 \\ w_{n+1}(x) = \Phi_x(w_n(x)) \end{array} \right.$$

Q 35. Démontrer que, pour tout réel positif x, $W(x)$ est un point fixe de Φ_x, c'est-à-dire une solution de l'équation $\Phi_x(t) = t$.

Q 36. Démontrer que, pour tout réel positif x, la fonction Φ_x est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \Phi_x'(t) \leq \frac{x}{e}$$

Q 37. En déduire que

$$\forall\, x \in [0, e], \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |w_n(x) - W(x)| \leq \left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)|$$

Q 38. Pour tout réel $a \in]0, e[$, justifier que la suite de fonctions (w_n) converge uniformément sur $[0, a]$ vers la fonction W.

Q 39. La suite de fonctions (w_n) converge-t-elle uniformément vers W sur $[0, e]$?