PSI* 2025/26 DL 3

Matrices bi-binaires

Travail demandé
Laissez la partie A de côté, on n'a pas encore vu cela. Je la laisse à titre d'exemple pour la fin du chapitre sur les éléments propres. Essayez de faire les questions de la partie B, les premières de la partie C (jusqu'à Q21, Q22 est plus dure), la première question de la partie D. Et bien sûr tout le sujet si vous pouvez. Ce sujet riche est un bon support pour apprendre plein de choses, il sera bon d'y revenir.

Soit un entier $n \geq 2$. On appelle matrice binaire de taille n une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou 1.

On désigne par $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des matrices binaires de taille n comportant exactement deux 1 dans chaque ligne et exactement deux 1 dans chaque colonne (donc pour moi celles-ci seront dites "bi-binaires", OK ?). Ainsi voici un exemple de matrice appartenant à $\mathcal{U}_4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A titre de motivation, une telle matrice peut être vue comme la matrice d'adjacence d'un graphe dont tous les degrés entrants et sortants valent 2.

On quantifie ces matrices, en étudiant deux indicateurs

— d'une part le cardinal de $\mathcal{U}_n$ qui sera noté u_n ; on pose par convention $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$ (parties B,C).

— d'autre part la dimension r_n de l'espace engendré par les matrices de $\mathcal{U}_n$ (partie D, indépendante)

On rappelle que le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est donné par $< X|Y >= X^\top Y$.

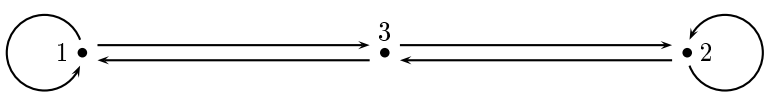
On note X_0 le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

A. Un exemple

On s'intéresse à une matrice de $\mathcal{U}_3$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui peut être vue comme la matrice d'adjacence du graphe suivant



Q1. Déterminer les valeurs propres de M : on les rangera par ordre croissant $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$.

Q2. Justifier qu'il existe une base orthonormée (X_1, X_2, X_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres pour M associés respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Exhiber une telle base.

Q3. Soit P la matrice dont les colonnes sont X_1, X_2, X_3. Justifier les relations $P^\top P = \mathrm{I}_3$ et $M = PDP^{-1} = PDP^\top$ avec $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients entiers que l'on précisera.

Q4. Expliciter les coefficients $[M^n]_{i,j}$ de la matrice M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

Q5. Pour $1 \leq i, j \leq 3$, que vaut la limite de $2^{-n}[M^n]_{i,j}$ lorsque n tend vers l'infini ?

B. Etude du cardinal de $\mathcal{U}_n$

Q6. Quel est le cardinal de l'ensemble de toutes les matrices binaires de taille n

Q7. Exhiber toute les matrices de $\mathcal{U}_n$ pour $n = 2$ et 3, et déterminer les valeurs correspondantes de u_n (dans le cas $n = 3$, on pourra raisonner sur la place des éléments nuls dans chacune de ces matrices).

Q8. Rappeler les trois types d'opérations élémentaires sur les colonnes (ou les lignes) d'une matrice. Parmi les trois, lesquels laissent l'ensemble $\mathcal{U}_n$ stable (on répondra directement, sans justification) ?

Q9. Montrer que X_0 est vecteur propre pour chacune des matrices appartenant à $\mathcal{U}_n$ et préciser la valeur propre associée (traduction : montrer qu'il existe λ que l'on précisera tel que pour tout $M \in \mathcal{U}_n$, $MX_0 = \lambda X_0$).

Soit $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices appartenant à $\mathcal{U}_n$ et qui possèdent un 1 en position (1,1). On note h_n le cardinal de $\mathcal{H}_n$.

Q10. Calculer la somme de toutes les matrices de $\mathcal{U}_n$ en fonction de h_n et de J.

Q11. En s'aidant des deux questions précédentes, établir la relation $u_n = \frac{n}{2} h_n$ pour tout $n \geq 2$.

On note $\mathcal{K}_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{H}_n$ formé des matrices ayant en outre un 1 en position (1,2) et un autre en position (2,1).

Q12. Pour $n \geq 2$, établir une relation donnant h_n en fonction de k_n et de $(n-1)^2$.

Q13. En examinant les possibilités pour le coefficient placé en position (2,2), démontrer la relation $k_n = u_{n-2} + h_{n-1}$ pour tout $n \geq 4$.

• On pose $w_n = \frac{u_n}{(n!)^2}$, et lorsque cela a un sens, $W(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$.

Q14. Déduire de ce qui précède une relation de récurrence pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis pour la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q15. Prouver que pour tout entier n, $w_n \in [0,1]$ et que la série de terme général w_n diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum w_n x^n$?

Q16. Donner une équation différentielle vérifiée par W, et en déduire l'expression de $W(x)$ pour $x \in]-1,1[$.

C. Recherche d'un équivalent

Cette partie permet d'obtenir un équivalent pour u_n lorsque n tend vers $+\infty$. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction ϕ définie pour $x \in]-1,1[$ par la formule

$$\phi(x) = \frac{e^{\alpha x}}{(1-x)^\beta}$$

On note $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ la fonction Γ d'Euler.

Q17. Justifier que Γ est définie pour $t \geq 1$ (pour les 5/2 : définie sur $\mathbb{R}_+^*$).

Q18. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$. En déduire que, quel que soit $K > 0$, on a $K^n = o(\Gamma(n+\beta))$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Q19. Montrer que si $x \in]-1,1[$, on peut écrire

$$\frac{1}{(1-x)^\beta} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

où l'on exprimera les coefficients a_n en fonction de $n!, \Gamma(\beta)$ et $\Gamma(n+\beta)$.

Q20. Montrer que ϕ vérifie la relation suivante sur $]-1,1[$:

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\psi_n}{n!\Gamma(\beta)} x^n, \qquad \text{avec } \psi_n = \int_0^{+\infty} u^{\beta-1} e^{-u} (\alpha+u)^n \, \mathrm{d}u$$

Q21. Montrer que pour $A > |\alpha|$ fixé, et pour tout $u_0 \in [-|\alpha|, |\alpha|]$, il existe une constante K telle qu'on ait l'inégalité

$$\int_{u_0}^{A} e^{-u} (u+\alpha)^{n+\beta-1} \, \mathrm{d}u \leq K.(2A)^{n+\beta-1}$$

à partir d'un certain rang. En déduire que pour n tendant vers l'infini,

$$\int_{A}^{+\infty} e^{-u} (u+\alpha)^{n+\beta-1} \, \mathrm{d}u \sim e^{\alpha} \Gamma(n+\beta)$$

Q22. Montrer que $\psi_n \sim e^{\alpha}\Gamma(n+\beta)$. Pour cela on propose de commencer par fixer $\varepsilon > 0$ et d'établir qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $u > A$,

$$(1-\varepsilon)u^n \leq (u+\alpha)^n \leq (1+\varepsilon)u^n$$

Poursuivre la démonstration.

Q23. Etablir un équivalent pour u_n lorsque n tend vers l'infini. On prendra soin de donner une forme simple pour cet équivalent.

D. Etude de rang

Dans cette partie, on s'intéresse au sous-espace vectoriel U_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{U}_n$ et on note r_n sa dimension.

Q24. Calculer r_n pour $n = 2$ et $n = 3$ (dans le cas $n = 3$, on pourra considérer les matrices $J - A$, où $A \in \mathcal{U}_3$).

On considère l'ensemble V_n des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que X_0 soit à la fois vecteur propre pour A et pour $A^\top$.

Q25. Montrer que V_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{U}_n$ et montrer que pour $A \in V_n$, les valeurs propres de A et $A^\top$ associées à X_0 sont égales.

Q26. Montrer qu'on peut construire une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ dont le premier vecteur est colinéaire à X_0. En déduire la dimension de V_n (on pourra s'intéresser aux endomorphismes a et $\tilde{a}$ canoniquement associés à A et $A^\top$), puis une majoration de r_n.

Pour $n \geq 3$, soit A une matrice de $\mathcal{U}_n$ comportant des 1 en position (1,1) et (2,2) et des 0 en position (1,2) et (2,1).

Q27. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{U}_n$ telle que $A - B$ ne comporte que des éléments nuls, *sauf* en position (i,j) pour $i \leq 2$ et $j \leq 2$.

On note W_n l'espace engendré par les matrices $U - V$ où U, V sont dans $\mathcal{U}_n$. On note r'_n sa dimension. Montrer que l'on a $r'_n \geq (n-1)^2$.

Q28. Conclure.