PSI* 2025/26 DS 2

Deux problèmes

Problème I - évolution d'une population de bactéries

Motivation : l'expérience concrète

Une éprouvette contient $N = 10$ bactéries, k du type A et $N-k$ du type B. On les laisse se reproduire en milliers d'exemplaires, les proportions de bactéries de chaque type restant inchangées. On prélève alors au hasard N bactéries que l'on met dans une autre éprouvette. On les laisse se reproduire en milliers d'exemplaires, dans les mêmes conditions que précédemment, et on recommence l'expérience. On cherche à savoir ce qui se passe après un grand nombre d'expériences.

Notations

On note N un entier supérieur ou égal à 2 et k_0 un entier de $\{0,\ldots,N\}$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, à valeurs dans $\{0,\ldots,N\}$, dont les lois de probabilité sont définies de la manière suivante :

X_0 est la variable certaine égale à k_0.

X_1 suit la loi binomiale de paramètres N et $p = \frac{k_0}{N}$. On pose $q = 1-p$.

Pour tout entier n non nul et tout entier k de $\{0,\ldots,N\}$ tel que $\mathbb{P}(X_n = k) \neq 0$, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_n = k)$ est la loi binomiale de paramètres N et $\frac{k}{N}$. En d'autres termes :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i | X_n = k) = \binom{N}{i}\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i}$$

On fait de plus l'hypothèse (H) :

(H) : pour tout entier n non nul, tout n-uplet $(k_1,\ldots,k_n)$ de $\{0,\ldots,N\}^n$ tel que $\mathbb{P}(X_n = k_n,\ldots,X_1 = k_1) \neq 0$, pour tout entier i de $\{0,\ldots,N\}$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i | X_n = k_n,\ldots,X_1 = k_1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i | X_n = k_n)$$

A. Etude du cas $N = 3$

- On fixe dans toute cette partie $N = 3$.

A1. Que dire de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $k_0 = 0$? Si $k_0 = 3$? Pourquoi peut-on se contenter d'étudier le cas $k_0 = 1$?

- On fixe donc en outre dans toute la suite de cette partie $k_0 = 1$.

A2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité de $B_n = \bigcap_{k=0}^{n}(X_k = 1)$?

A3. On note $U_n = \begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n=0)\\ \mathbb{P}(X_n=1)\\ \mathbb{P}(X_n=2)\\ \mathbb{P}(X_n=3)\end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $U_{n+1} = AU_n$.

A4. On considère le vecteur ligne $V \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$ donné par $V = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

a. Montrer que $\mathbb{E}[X_n] = VU_n$.

b. Que vaut VA ?

c. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[X_n]$ pour tout n.

A5. Pour plus de simplicité, on note $e_1, \ldots, e_4$ la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et on note a l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.

a. Déterminer l'espace propre $\ker(a - \mathrm{Id})$.

b. Déterminer toutes les valeurs propres de a.

c. Donner une base de vecteurs propres pour a de la forme suivante : $u_1 = e_1$, u_2, u_3, et enfin $u_4 = e_4$.
En déduire une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $PA = DP$.

A partir de là il est possible de calculer complètement les puissances de A et d'obtenir la loi de X_n, et d'étudier la limite de $\mathbb{P}(X_n = k)$ pour observer un phénomène d'homogénéisation. On va chercher à établir ce dernier point par une méthode plus rapide et plus générale.

B. Généralisation

• Dans cette partie N est un entier supérieur ou égal à 2 et k_0 un entier appartenant à $\{1, \ldots, N-1\}$.
On pose, pour tout entier n, $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_n = N)$ et $v_n = 1 - u_n$.

B1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

B2. Montrer que pour tout entier n, $\mathbb{E}[X_{n+1}] = \mathbb{E}[X_n]$.

B3. Montrer que pour tout entier n, $\mathbb{E}[X_{n+1}(N - X_{n+1})] = \frac{N-1}{N}\mathbb{E}[X_n(N - X_n)]$.
En déduire la valeur de $\mathbb{E}[X_n(N - X_n)]$ en fonction de n, N et k_0.

B4.a. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que pour $a > 0$, $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$.

b. Tracer sur $[0, N]$ la fonction f définie par $\forall x \in [0, N]$, $f(x) = x(N - x)$.

c. En utilisant la question 3., montrer que pour tout entier n, $0 \leq v_n \leq pq\frac{N^2}{N-1}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$.

B5.a. Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
En déduire que pour tout entier $k \in \{1, \ldots, N-1\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = 0$.

b. Déterminer également la limite de $\mathbb{P}(X_n = 0)$ et celle de $\mathbb{P}(X_n = N)$

B6. On définit la variable aléatoire T par
- si pour tout entier n, $(X_n \neq 0)$ et $(X_n \neq N)$ alors $T = +\infty$;
- sinon, $T = n$ en notant n le plus petit entier k tel que $(X_k = 0)$ ou $(X_k = N)$.

a. Que vaut $\mathbb{P}(T = +\infty)$? Montrer que pour tout entier n non nul, $\mathbb{P}(T = n) = v_{n-1} - v_n$.

b. Montrer que T admet une espérance, qu'on ne cherchera pas à calculer, et que $\mathbb{E}[T] \leq \frac{pqN^3}{N-1}$.

Problème 2 - autour de l'inégalité de Hoffman-Wielandt

Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On appelle permutation de $\{1, \ldots, n\}$ toute bijection de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$.

On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices *bistochastiques* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et tels que $\sum\limits_{j=1}^{n} A_{i,j} = \sum\limits_{j=1}^{n} A_{j,i} = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices de permutation $M_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont de la forme :

$$(M_\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour tous i, j dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, où σ est une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Points extrémaux de $\mathcal{B}_n$

Soit $\mathcal{A}$ un sous ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que $\mathcal{A}$ est convexe si pour tous M, N dans $\mathcal{A}$ et tout $\lambda \in [0,1]$, la matrice $\lambda M + (1-\lambda)N$ est encore dans $\mathcal{A}$.

De plus on dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *extrémale dans* $\mathcal{A}$ si pour tous M, N dans $\mathcal{A}$ et tout $\lambda \in]0,1[$ (ouvert), on a l'implication :

$$A = \lambda M + (1-\lambda)N \Longrightarrow A = M = N.$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}_n$ est convexe. Est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Montrer que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n$, et qu'une matrice de $\mathcal{B}_n$ est dans $\mathcal{P}_n$ si et seulement si elle possède exactement un coefficient 1 dans chaque ligne et chaque colonne. L'ensemble $\mathcal{P}_n$ est-il convexe ?
3. Montrer que toute matrice de $\mathcal{P}_n$ est extrémale dans $\mathcal{B}_n$.

Dans toute la suite de cette partie, on considère une matrice ***bistochastique*** $A = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ *qui n'est* ***pas*** *une matrice de permutation.*

4. Montrer qu'il existe un entier $r > 1$ et deux familles $i_1, i_2, \ldots, i_r$ et $j_1, j_2, \ldots, j_r$ d'indices dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, chaque i_k étant distinct du suivant ($i_k \neq i_{k+1}$), chaque j_k étant distinct du suivant ($j_k \neq j_{k+1}$) et tels que pour tous $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $A_{i_k,j_k} \in]0,1[$ et $A_{i_k,j_{k+1}} \in]0,1[$, avec enfin $j_{r+1} = j_1$.
5. En considérant la matrice $B = (B_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} B_{i_k,j_k} = 1 & \text{si } k \in \{1, 2, \ldots, r\} \\ B_{i_k,j_{k+1}} = -1 & \text{si } k \in \{1, 2, \ldots, r\} \\ B_{i,j} = 0 & \text{dans les autres cas,} \end{cases}$$

   montrer que A n'est pas un élément extrémal de $\mathcal{B}_n$. En déduire que l'ensemble des éléments extrémaux de $\mathcal{B}_n$ est $\mathcal{P}_n$.

Théorème de Birkhoff-Von Neumann

On considère encore une matrice ***bistochastique*** $A = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ *qui n'est* ***pas*** *une matrice de permutation. On admet que pour une telle matrice, il existe une permutation* σ *de* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *telle que* $M_{\sigma(1),1}M_{\sigma(2),2}\cdots M_{\sigma(n),n} > 0$.

On considère une telle permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et on pose $\lambda_0 = \min\limits_j \left(A_{\sigma(j),j}\right)$ et $A_0 = \dfrac{1}{1-\lambda_0}(A - \lambda_0 M_\sigma)$ où M_σ est la matrice de permutation associée à σ.

6. Montrer que A_0 est bien définie, et que c'est une matrice bistochastique contenant au moins un élément nul de plus que A.
7. En raisonnant par récurrence, démontrer que A s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de matrices de permutation $M_0, M_1, \ldots, M_s$:

$$A = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_s M_s$$

   où les coefficients λ_i sont tous strictement positifs et de somme $\sum\limits_{i=0}^{s} \lambda_i = 1$.
8. Soit φ une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\inf\limits_{M\in\mathcal{P}_n} \varphi(M)$ existe. En déduire que $\inf\limits_{M\in\mathcal{B}_n} \varphi(M)$ existe et est atteint en une matrice de permutation.

Inégalité de Hoffman-Wielandt

Dans cette partie, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\,(A^\top B)$ et de la norme euclidienne associée : $\|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^\top A)}$. On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^\top M = \mathrm{I}_n\}$ (ensemble des matrices orthogonales).

9. a. Montrer que si P et Q sont dans $O_n(\mathbb{R})$ alors Q est inversible et PQ et PQ^{-1} sont également dans $O_n(\mathbb{R})$.

   b. Montrer que pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P, Q dans $O_n(\mathbb{R})$, on a $\|PAQ\| = \|A\|$.

Dans la suite de cette partie, A et B désignent deux matrices ***symétriques réelles****.*

10. Montrer qu'il existe deux matrices diagonales réelles D_A, D_B, et une matrice orthogonale $P = (P_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ telles que $\|A - B\|^2 = \|D_A P - P D_B\|^2$.
11. Montrer que la matrice R définie par $R_{i,j} = (P_{i,j})^2$ pour tous i, j dans $\{1, 2, \dots, n\}$ est bistochastique et que
$$\|A - B\|^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} R_{i,j} |\lambda_i(A) - \lambda_j(B)|^2$$
où $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ désignent les valeurs propres de A et $\lambda_1(B), \dots, \lambda_n(B)$ celles de B.
12. En déduire que
$$\min_\sigma \sum_{j=1}^n |\lambda_{\sigma(j)}(A) - \lambda_j(B)|^2 \leq \|A - B\|^2$$
où le minimum porte sur l'ensemble de toutes les permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$.

Soit (Ω, Υ, P) un espace probabilisé et V l'ensemble des variables aléatoires définies sur cet espace admettant un moment d'ordre 2 (c'est-à-dire tels que X^2 admet une espérance). Pour tout X de V , on note $X \sim P_X$ si X suit la loi P_X. Pour tout couple (P_1, P_2) de lois, on pose
$$\mathrm{d}^2(P_1, P_2) = \inf_{\substack{X,Y\in V \\ X\sim P_1, Y\sim P_2}} E(|X - Y|^2).$$

On ne s'intéresse à cette distance que dans un cas particulier. Soit $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ deux familles de réels (les a_i deux à deux distincts, les b_i deux à deux distincts). On note P_1 la loi uniforme sur $\{a_1, \dots, a_n\}$ et P_2 la loi uniforme sur $\{b_1, \dots, b_n\}$.

13. Montrer que
$$\mathrm{d}^2(P_1, P_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a(i) - b(i)|^2$$
où l'on a noté $a(1) < \cdots < a(n)$ et $b(1) < \cdots < b(n)$ les suites $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ ré-ordonnées par ordre croissant. En déduire que pour toutes matrices symétriques réelles A, B de valeurs propres respectives $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$, on a l'inégalité :
$$\mathrm{d}^2(P_1, P_2) \leq \|A - B\|^2.$$