PSI* 2025/26 DL 6

Une formule de Hardy et Ramanujan

L'objectif de ce problème est l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier naturel n, c'est-à-dire du nombre de décompositions de n en somme d'entiers naturels non nuls (sans tenir compte de l'ordre des termes). Une définition rigoureuse de ce nombre, noté p_n, est donnée en début de partie **C**. Dans la partie **A**, on introduit une fonction P de variable complexe ; dans la fin de la partie **C** on démontre qu'il s'agit de la somme, sur le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n z^n$. L'étude de P au voisinage de 1 permet alors, dans les parties suivantes, de progresser vers l'obtention d'un équivalent simple de la suite $(p_n)_{n\in NN}$ (formule asymptotique de Hardy et Ramanujan).

Tout au long du problème, le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ sera noté :

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Dans tout l'énoncé, on utilisera la dénomination « variable aléatoire réelle » pour signifier « variable aléatoire discrète réelle ».

On admettra aussi les deux identités classiques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \text{ et : } \int_{RR} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}.$$

Travail demandé : jusqu'à Q14 (vous pouvez faire plus bien sûr) - pour vendredi 28/11

A. Fonctions L et P

1. Soit $z \in D$. Montrer la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$. Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in]-1,1[$. On notera :
$$L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}.$$
2. Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Phi : t \mapsto L(tz)$ est dérivable sur $[-1,1]$ et donner une expression simple de sa dérivée.
3. Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Psi : t \mapsto (1-tz)e^{L(tz)}$ est constante sur $[0,1]$, et en déduire que :
$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1-z}.$$
4. Montrer que $|L(z)| \leqslant -\ln(1-|z|)$ pour tout z dans D.
En déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} L(z^n)$ pour tout z dans D.

Dans la suite, on notera, pour z dans D :

$$P(z) := \exp\left[\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right].$$

5. Soit $z \in D$. Vérifier que $P(z) \neq 0$, que :

$$P(z) = \lim_{N \to +\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - z^n}$$

et que pour tout réel $t > 0$:

$$\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - e^{-nt}\right).$$

B. Développement asymptotique en variable réelle

Dans cette partie, on introduit la fonction q qui à tout réel x associe le nombre réel $q(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

6. Montrer que q est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, qu'elle est 1-périodique et que la fonction $|q|$ est paire.
7. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{e^{tu} - 1}\, \mathrm{d}u$ est bien définie pour tout réel $t > 0$.
8. Montrer que pour tout entier $n > 1$:

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u = \ln(n!) + (n-1) - n\ln(n) - \frac{1}{2}\ln(n) = \ln\left(\frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}\right) - 1.$$

9. Montrer que $\displaystyle\int_{\lfloor x \rfloor}^{x} \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et en déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\, \mathrm{d}u$, ainsi que l'égalité :

$$\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1$$

10. À l'aide d'un développement en série sous l'intégrale, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 - e^{-u}\right) \mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6}.$$

11. Montrer que :

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1 - e^{-tu}}{t}\right) \mathrm{d}u \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} -1.$$

On pourra notamment établir que $x \mapsto \frac{1 - e^{-x}}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t q(u)}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u \quad \text{si } t > 0, \quad \text{et :} \quad u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{q(u)}{u}\, \mathrm{d}u \quad \text{si } t = 0.$$

12. Montrer que u_k est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
13. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer successivement que $|u_k(t)| = \displaystyle\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u$ puis $u_k(t) = (-1)^k |u_k(t)|$ pour tout entier $k \geqslant 1$. Ensuite, ceci est une question pour 5/2, les autres vous pouvez l'admettre... établir enfin que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)\right| \leqslant \frac{1}{2n}.$$

On admettra dans la suite que cette majoration vaut encore pour $t = 0$.

14. En déduire que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{t q(u)}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

15. Montrer, pour tout réel $t>0$, l'identité :

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right) - \ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u.$$

16. Conclure que :

$$\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) = \frac{\pi^2}{6t} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} + \underset{t\to 0^+}{o}(1).$$

C. Développement de P en série entière

Pour $(n,N)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, on note $P_{n,N}$ l'ensemble des listes $(a_1,\ldots,a_N)\in\mathbb{N}^N$ telles que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} ka_k = n$. Si cet ensemble est fini, on note $p_{n,N}$ son cardinal.

17. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $P_{n,N}$ est inclus dans $[\![0,n]\!]^N$ et est non vide pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, que la suite $\left(p_{n,N}\right)_{N\geqslant 1}$ est croissante et qu'elle est constante à partir du rang $\max(n,1)$.

Dans toute la suite, on notera p_n la valeur finale de $\left(p_{n,N}\right)_{N\geqslant 1}$.

18. Soit $N\in\mathbb{N}^*$. Donner une suite $\left(a_{n,N}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall z\in D,\quad \frac{1}{1-z^N} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,N}z^n.$$

En déduire, par récurrence, la formule :

$$\forall N\in\mathbb{N}^*,\ \forall z\in D,\quad \prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N}z^n.$$

19. On fixe $\ell\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1[$. En utilisant le résultat de la question précédente, établir la majoration : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\ell} p_n x^n \leqslant P(x)$. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} p_n z^n$.

20. Soit $z\in D$. En examinant la différence $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N}z^n$, démontrer que :

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n.$$

21. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que pour tout réel $t>0$:

$$p_n = \frac{e^{nt}P\left(e^{-t}\right)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\frac{P\left(e^{-t+i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\mathrm{d}\theta. \tag{1.1}$$

Dans le reste du problème, l'objectif est d'utiliser la formule (1.1) pour obtenir un contrôle assez fin du nombre p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

D. Contrôle de P

22. Soient $x\in[0,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$. En utilisant la fonction L, montrer que :

$$\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| \leqslant \exp(-(1-\cos(\theta))x).$$

En déduire que pour tout $x\in[0,1[$ et tout réel θ :

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\right).$$

23. Soient $x \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) \geqslant \frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2 + 2x(1-\cos(\theta))\right)}.$$

En déduire que si $x \geqslant \frac{1}{2}$, alors :

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1-\cos(\theta)}{6(1-x)^3}\right) \quad \text{ou que} \quad \left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).$$

Pour ce dernier résultat, on distinguera deux cas selon les valeurs relatives de $x(1-\cos(\theta))$ *et* $(1-x)^2$.

24. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi], \quad 1 - \cos(\theta) \geqslant \alpha\theta^2.$$

En déduire qu'il existe trois réels $t_0 > 0, \beta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que, pour tout $t \in]0, t_0]$ et tout $\theta \in [-\pi, \pi]$:

$$\left|\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right| \leqslant e^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2} \qquad \text{ou} \qquad \left|\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right| \leqslant e^{-\gamma\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}}.$$

25. En déduire que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)} \mathrm{d}\theta \underset{t\to 0^+}{=} o\left(t^{3/2}\right).$$

E. Conclusion

26. En prenant $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ dans (1.1), conclure que :

$$p_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{n}\right).$$

Épilogue. Le dernier résultat est très proche de l'optimalité. Par une analyse plus fine de l'intégrale dans la formule (1.1), on peut en effet établir l'équivalent :

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}n},$$

formule découverte par Hardy et Ramanujan en 1918.