PSI* 2025/26 DL 7

Étude qualitative de solutions d'équations différentielles

A remettre avant les vacances (mercredi si possible). C'est un ancien sujet de DS composé avec plusieurs sujets de concours. Je voudrais au moins I, II jusqu'à II4 et III jusqu'à III4b et en zappant la question QP éventuellement.

Les trois parties sont indépendantes et ont pour but l'analyse du comportement qualitatif des solutions d'une équation différentielle de la forme $y'' + q(t)y = 0$.

Partie I

1. Soit q un réel. Quelles sont les solution de l'équation $y'' + qy = 0$?

2. A quelle condition portant sur q peut-on dire qu'il existe au moins une solution non nulle et bornée pour l'équation $y'' + qy = 0$?

3. A quelle condition portant sur q peut-on dire que l'équation $y'' + qy = 0$ a toutes ses solutions bornées ?

Partie II

On note (E) l'équation différentielle

$$(E) : \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + q(x)f(x) = 0 \qquad \text{où } q(x) = 1 + \frac{1}{1 + x^2 + x^4}$$

et S l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de (E).

1. Enoncer le théorème d'existence et d'unicité du problème de Cauchy. Que sait-on sur S ?

2. Si $f \in S$, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3. Inégalité de Gronwall

Soient $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) \leq a(x)h(x)$.

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \leq y \Rightarrow h(y) \leq h(x) \exp\left(\int_x^y a(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Pour cela on pourra étudier $x \mapsto h(x) \exp\left(\int_x^y a(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

- **Dans les questions 4 et 5, f est une solution de (E).**

4. Les solutions sont bornées

Soit $h = f^2 + (f')^2$.

(a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) \leq (q(x)-1)h(x)$.

(b) En déduire que f et f' sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Utilisant une fonction auxiliaire, montrer que que f et f' sont bornées sur $\mathbb{R}_-$ et donc finalement sur $\mathbb{R}$.

5. Conditions de nullité en un point

(a) On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = f'(a) = 0$. Que peut-on dire ?

- *Redémontrons ce résultat (5.(a)) sans utiliser le cours.*

(b) Montrer que $\forall x \in [a, +\infty[, h(x) \leq 0$, où h est la fonction définie au 4. Qu'en conclure sur $f(x)$?

(c) Soit $\Phi : x \in \mathbb{R} \mapsto f(a-x)$. Déterminer $r \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\Phi'' + r\Phi = 0$.

(d) Montrer que $f = 0$.

- **Dans les questions 6 et 7, f est une solution de (E), non nulle.**

6. Les zéros sont isolés

(a) On suppose qu'il existe une suite (x_n) de réels, distincts, qui converge vers un réel x et vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = 0$.
Montrer que $f(x) = f'(x) = 0$. Conclusion ?

(b) On admettra ici le théorème de Bolzano-Weierstrass : « si (x_n) est une suite bornée de réels, alors (x_n) admet une suite extraite convergente ».
Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, montrer que f n'a qu'un nombre fini de points d'annulation dans $[a, b]$.

7. Comparaison avec les solutions de l'équation limite $y'' + y = 0$

(a) Donner les solutions de $(F) : y'' + y = 0$.

- *On va montrer que f s'approche en $+\infty$ par une solution de (F).*

(b) Montrer qu'il existe d'uniques fonctions (a, b) bornées et de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f(x) & = a(x)\cos x + b(x)\sin x \\ f'(x) & = -a(x)\sin x + b(x)\cos x \end{cases}$$

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} a'(x) & = (q(x)-1)f(x)\sin x \\ b'(x) & = (1-q(x))f(x)\cos x \end{cases}$$

(d) Montrer que a et b admettent des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$.

(e) Justifier enfin que f s'approche en $+\infty$ par une solution de (F).

(f) Représenter l'allure d'une solution de f sur $\mathbb{R}$ (on fera un croquis où les limites de $a(x)^2 + b(x)^2$ sont différentes en $+\infty$ et $-\infty$).

Partie III

QP . Question préliminaire

Soit H une matrice réelle carrée de taille 2 admettant 1 pour valeur propre double et vérifiant $\mathrm{rg}(H - \mathrm{Id}) = 1$.

Montrer que H est semblable à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire qu'il existe P inversible telle que $A = P^{-1}HP$.

• Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue non identiquement nulle, de période 1. On étudie l'équation différentielle suivante :

$$(E') \qquad y''(t) + p(t)y(t) = 0$$

1. Rappeler pourquoi l'ensemble S' des solutions de (E') constitue un vectoriel de dimension 2.
Justifier qu'il existe deux solutions Φ_1 et Φ_2 de (E') vérifiant les conditions

$$\Phi_1(0) = 1, \Phi_1'(0) = 0, \Phi_2(0) = 0, \Phi_2'(0) = 1,$$

et que ces deux fonctions forment une base de l'espace vectoriel S'.

• On notera dans toute la suite F la matrice suivante

$$F = \begin{pmatrix} \Phi_1(1) & \Phi_2(1) \\ \Phi_1'(1) & \Phi_2'(1) \end{pmatrix}.$$

2. En utilisant la fonction $W = \Phi_1\Phi_2' - \Phi_1'\Phi_2$, montrer que $\det F = 1$.

3. Soient deux réels α et β donnés et y la solution de (E') vérifiant $y(0) = \alpha$ et $y'(0) = \beta$.

a. Exprimer y en fonction de Φ_1 et Φ_2.

b. Soit z la solution de (E') défine par $z(1) = \alpha$ et $z'(1) = \beta$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(1+t) = y(t)$.

4. On analyse les solutions vérifiant une relation de la forme $\forall t \in \mathbb{R}, u(t+1) = \lambda u(t)$.

a. On suppose qu'il existe une solution u non identiquement nulle de (E') et un réel λ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, u(t+1) = \lambda u(t)$$

Prouver que λ est une valeur propre de la matrice F.

b. Prouver la réciproque de a.

c. On se place dans les hypothèses de 4.a., avec u non nulle et vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}, u(t+1) = \lambda u(t)$.
A quelle condition portant sur λ la fonction u est-elle bornée sur $\mathbb{R}$?

d. On se place encore dans les hypothèses de 4.a. On suppose en outre que $\int_0^1 p(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.
Montrer que la fonction u s'annule au moins une fois sur $[0,1]$
(On pourra raisonner par l'absurde et diviser l'équation par u).

5. On note T le réel $T = \Phi_1(1) + \Phi_2'(1)$.

a. On s'intéresse aux valeurs propres de F, éventuellement complexes.
Préciser la position de ces valeurs propres dans le plan complexe, en discutant selon la valeur de $T^2 - 4$.
On fera un croquis.

b. Montrer que si $|T| > 2$, les solutions non nulles de (E') sont toutes non bornées.

c. Montrer que si $|T| < 2$, les solutions de (E') sont toutes bornées.

d. Que se passe-t-il dans le cas $|T| = 2$?

6. On établit une condition suffisante portant sur p pour que les solutions de (E') soient toutes bornées. On passe par un lemme portant sur une fonction f (pas nécessairement une solution d'équation différentielle).

a. On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un segment $[a,b]$, avec $f(a) = f(b) = 0$ et f strictement positive sur $]a,b[$. On pose $J = \displaystyle\int_a^b \frac{|f''(t)|}{f(t)}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(b-a)J \geq 4$. Pour cela on pourra commencer par prouver, $\forall c \in]a,b[$,

$$\frac{4}{b-a} \leq \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{1}{f(c)}\left(\frac{f(c)-f(a)}{c-a} - \frac{f(b)-f(c)}{b-c}\right),$$

puis on choisira c convenablement.

b. En déduire que si p est positive et vérifie $\int_0^1 p(t)\,\mathrm{d}t < 4$, alors toutes les solutions de (E') sont bornées.