PSI* 2025/26 DS 3B

Fonctions eulériennes, transformée d'Abel

Notations

On note E l'espace vectoriel normé des applications continues du segment $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. Il est muni de la norme $f \mapsto \|f\| = \sup\limits_{0\leq t\leq 1} |f(t)|$.

Si v est une application linéaire de E dans lui-même et si $f \in E$, on écrira vf pour $v(f)$. De plus si v est lipschitzienne, on peut poser

$$|\!|\!| v |\!|\!| = \sup_{\|f\|\leq 1} \|vf\|$$

Le problème se propose d'étudier quelques propriétés d'un opérateur appliquant E dans lui-même qui est introduit dans la troisième partie. Pour ce faire, on met en place dans les deux premières parties des outils nécessaires à cette étude.

I Les fonctions eulériennes

I.A. ***La deuxième fonction eulérienne fonction*** Γ

I.A.1) Soit $x > 0$. Montrer que $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Dans toute la suite, on notera Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

On admettra que Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition, à valeurs strictement positives et qu'elle vérifie, pour tout réel $x > 0$, la relation

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

I.A.2) Montrer que Γ vérifie, pour tout réel $x > 0$, la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire aussi que pour tout entier naturel n, $\Gamma(n+1) = n!$.

I.A.3) En déduire qu'il existe un réel $c \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$, puis que Γ est strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

I.A.4) Montrer que pour tout réel $\gamma > 0$, on a $\gamma^x = o(\Gamma(x))$ au voisinage de $+\infty$.

I.A.5) Soient x et α deux réels strictement positifs. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ et donner sa valeur en fonction de $\Gamma(x)$ et α^x.

I.B. ***La première fonction eulérienne*** B ***et son équation fonctionnelle***

Pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on définit $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$.

I.B.1) Justifier l'existence de $B(x,y)$ pour $x > 0$ et $y > 0$.

I.B.2) Montrer que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $B(x, y) = B(y, x)$.

I.B.3) Soient $x > 0$ et $y > 0$. Établir que $B(x+1, y) = \dfrac{x}{x+y} B(x, y)$.

I.B.4) En déduire que pour $x > 0$ et $y > 0$, $B(x+1, y+1) = \dfrac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\, B(x, y)$.

I.C. ***Relation entre la fonction B et la fonction Γ***

On veut montrer que pour $x > 0$ et $y > 0$, $B(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, relation qui sera notée $(\mathcal{R})$.

I.C.1) Expliquer pourquoi il suffit de montrer la relation $(\mathcal{R})$ pour $x > 1$ et $y > 1$.

Dans toute la suite de cette question, on supposera que $x > 1$ et $y > 1$.

I.C.2) Montrer que $B(x, y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\, \mathrm{d}u$.

On pourra utiliser le changement de variable $t = \dfrac{u}{1+u}$.

I.C.3) On note $F_{x,y}$ la primitive sur $\mathbb{R}_+$ de $t \mapsto e^{-t} t^{x+y-1}$ qui s'annule en 0. Montrer que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+,\ F_{x,y}(t) \leq \Gamma(x+y)\,.$$

I.C.4) Soit $G(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}\big((1+u)a\big)\, \mathrm{d}u$.

Montrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

I.C.5) Montrer que $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} G(a) = \Gamma(x+y) B(x, y)$.

I.C.6) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[c, d]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, puis que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

I.C.7) Exprimer pour $a > 0$, $G'(a)$ en fonction de $\Gamma(x)$, e^{-a} et a^{y-1}.

I.C.8) Déduire de ce qui précède la relation $(\mathcal{R})$.

II Formule des compléments

II.A. ***Établissement de la formule***

II.A.1) Établir que la fonction $\alpha \mapsto B(\alpha, 1-\alpha)$ est continue sur l'intervalle $]0, 1[$.

II.A.2) Soient p et q deux entiers tels que $0 < p < q$.

a) Vérifier que :

$$B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1 - \frac{2p+1}{2q}\right) = 2q \int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\, \mathrm{d}t$$

b) Pour tout entier k compris entre 0 et $q-1$, on note :

$$z_k = e^{i \frac{2k+1}{2q} \pi}$$

Établir que :

$$(*) \qquad \frac{X^{2p}}{1+X^{2q}} = -\frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \left(\frac{1}{X - z_k} - \frac{1}{X + z_k} \right)$$

c) Après avoir vérifié que, pour tout nombre complexe c de partie imaginaire non nulle, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2} \ln\left((t - \mathfrak{Re} c)^2 + (\mathfrak{Im} c)^2 \right) + i \arctan\left(\dfrac{t - \mathfrak{Re} c}{\mathfrak{Im} c} \right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$t \mapsto \dfrac{1}{t-c}$, prouver, en utilisant judicieusement la relation $(*)$, que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,\mathrm{d}t = -i\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$$

En conclure que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2q}\frac{1}{\sin\left(\frac{2p+1}{2q}\pi\right)}$$

II.A.3) Déduire des deux questions précédentes la formule des compléments :

$$\forall \alpha \in]0,1[\quad , \quad B(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

II.B. Une application : en déduire les valeurs de $\Gamma(\frac{1}{2})$ et de $\Gamma(p+\frac{1}{2})$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

III L'opérateur d'Abel

Dans toute cette dernière partie, on suppose que α est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$.

III.A. ***L'opérateur*** A_α

III.A.1) Établir que pour toute fonction f de E et pour tout réel x de l'intervalle $]0,1]$, la fonction $f \mapsto \dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,x[$.

III.A.2) Pour tout élément f de E, on note $A_\alpha f$ la fonction définie sur le segment $[0,1]$ par les formules suivantes :

$$A_\alpha f(x) = 0 \quad \text{si } x = 0$$

$$A_\alpha f(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad \text{si } 0 < x \leq 1$$

a) Vérifier que, pour tout f élément de E et tout réel x du segment $[0,1]$,

$$A_\alpha f(x) = x^{1-\alpha}\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

b) Montrer que, pour tout élément f de E, la fonction $A_\alpha f$ est une fonction continue sur le segment $[0,1]$.

c) Établir que l'application $A_\alpha : f \mapsto A_\alpha f$ est un endomorphisme lipschitzien de l'espace vectoriel normé E et que :

$$|||A_\alpha||| = \sup_{\|f\|\leq 1} \|A_\alpha f\| = \frac{1}{1-\alpha}$$

III.B. ***Itération et calcul d'inverse***

On définit la suite $(A_\alpha^n)_{n\geq 0}$ par la condition initiale $A_\alpha^0 = id_E$ (application identique de E) et, pour tout $n \geq 0$, par la relation de récurrence suivante :

$$A_\alpha^{n+1} = A_\alpha \circ A_\alpha^n$$

III.B.1) On pose $\beta = 1-\alpha$.

a) Pour tout entier $n \geq 1$, pour tout f élément de E et pour tout x du segment $[0,1]$, établir l'inégalité suivante :

$$|A_\alpha^n f(x)| \leq \frac{x^{n\beta}(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\,\|f\|$$

b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, A_α^n est un endomorphisme continu de E et que :

$$|||A_\alpha^n||| \leq \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}$$

III.B.2) Pour tout nombre réel positif γ, montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \gamma^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = 0$$

On pourra utiliser le résultat de la question I.A.4.

III.B.3) Soient λ un nombre complexe non nul et f un élément de E.

a) Prouver que la série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$.

On note g la somme de cette série de fonctions.

b) Prouver que

$$(id_E - \lambda A_\alpha)g = f$$

c) En déduire que, pour tout nombre complexe λ non nul, l'opérateur $id_E - \lambda A_\alpha$ est inversible et que :

$$(id_E - \lambda A_\alpha)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$$

où $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$ désigne l'application $f \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n(f)$.

III.C. *Composition et formule d'inversion d'Abel*

Pour tout entier naturel n, on note e_n la fonction monômiale $t \mapsto t^n$.

III.C.1) Soit n un entier naturel.

a) Calculer $A_\alpha e_n$.

b) En déduire que :

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)e_n = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \frac{e_{n+1}}{n+1}$$

III.C.2) Ce résultat suggère d'introduire l'opérateur P défini sur E par la formule suivante :

$$\forall x \in [0,1] \quad , \quad Pf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, avec cette notation, pour tout entier naturel n,

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)e_n = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} Pe_n$$

Établir que, pour toute fonction polynômiale ψ,

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)\psi = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} P\psi$$

III.C.3) Formule d'inversion d'Abel.

a) Montrer que l'endomorphisme P est un endomorphisme continu de E tel que :

$$|||P||| = \sup_{\|f\|\le 1} \|Pf\| = 1$$

b) *Pour cette question on pourra admettre le théorème de Weirstrass : toute fonction de E est limite uniforme de fonctions polynômiales.* On pose $B_\alpha = A_{1-\alpha} \circ A_\alpha$. Montrer que :

$$B_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} P$$

c) Soit D l'opérateur qui à toute application continûment dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ associe sa dérivée. Montrer que $D \circ B_\alpha$ est bien défini et que :

$$D \circ B_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} id_E$$

d) En déduire que l'opérateur A_α est injectif.